Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2009

Analysis IIIb

Prof. Brüning

Bodo Graumann

19. Mai 2014

XeTeX Der Code wurde mit gvim sowie vim-latex erstellt und mit xelatex kompiliert – all das auf Gentoo Linux. Meinen Dank an die Freie Software Community und die TeX-Kollegen auf TeX.SX für ihre Hinweise und Unterstützung.

Bitte schreibt mir eure Kommentare und Verbesserungsvorschläge zu diesem Dokument! Ihr könnt mir entweder direkt mailen oder das Kontaktformular auf meiner Internetseite benutzen.

Inhaltsverzeichnis

9 Einführung in die Funktionentheorie

9.1 komplexe Kurvenintegrale

Wir möchten ein Integral definieren, sodass für ein F mit $F' = f$ gilt

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$$

1 **Definition: „komplexes Kurvenintegral“**

Ist c ein stückweiser C^1-Weg, dann definieren wir das Integral als:

$$\int_c f(z)dz := \int_0^1 f(c(t))c'(t)dt$$

In unserer obigen Forderung sind dann $a = c(0)$ und $b = c(1)$ und es wird die Wegunabhängigkeit dieses Integrals gefordert. Zunächst folgen die Eigenschaften dieses Integrals sofort aus dem Bekannten:

2 **Lemma: Eigenschaften des Kurvenintegrals**

Lineariät:

$$\int_c af(z) + bg(z)dz = a\int_c f(z)dz + b\int_c g(z)dz$$

Additivität, mit $c_1(1) = c_2(0)$

$$\int_{c_1 * c_2} f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz$$

Änderung der Durchlaufrichtung, mit $c^{-1}(t) = c(1-t)$

$$\int_{c^{-1}} f(z)dz = -\int_c f(z)dz$$

Standardabschätzung

$$\int_c f(z)dz \leq (c(1) - c(0)) \sup_{\operatorname{im} c} f(z)$$

9.2 der Cauchysche Integralsatz

3 **Satz:**

Sei G ein Sterngebiet und f holomorph in G. Dann verschwindet das Integral über jeden geschlossenen C^1-Weg in G von f.

4 **Satz:**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C(G)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f besitzt in G eine Stammfunktion F.
2. Das Integral von f über jeden geschlossenen, stückweise C^1-Weg in G verschwindet.

5 **Lemma:**

Das Integral einer holomorphen Funktion über einem Dreiecksweg verschwindet.

Beispiel: Die Frenelschen Integrale

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt, \qquad \int_0^\infty \sin t^2 dt$$

6 **Satz:**

Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| \leq 1$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-(1+ia)^2 t^2} dt = \frac{1}{2} \frac{1 - ia}{1 + a^2} \sqrt{\pi}$$

Folgerung Über Real- und Imaginärteil erhält man dann die Frenelschen Integrale.

7 **Lemma:**

Sei G ein Gebiet, $z \in G$, $\overline{B_\varepsilon}(c) \subset G$ und $B_\delta(z) \subset B_\varepsilon(c)$. Ist $f \colon G \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt

$$\oint_{\partial B_\varepsilon(c)} f = \oint_{\partial B_\delta(z)} f$$

8 **Satz: Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben**

Sei f holomorph im Gebiet G, $B := B_r(c)$, $r > 0$ und $\overline{B} \subset G$, dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Folgerung: Mittelpunktgleichung

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\varphi}) rie^{i\varphi}}{c + re^{i\varphi} - c} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\varphi}) d\varphi$$

Folgerung: Mittelpunkt<u>un</u>gleichung

$$|f(c)| \leq |f|_{\partial B} = \sup_{z \in \partial B} |f(z)|$$

9 **Korollar: von Landau**

Für alle $z \in B$ gilt:

$$|f(z)| \leq |f|_{\partial B}$$

10 **Satz: Entwicklungssatz**

Sei f holomorph in einem Gebiet G und $B_d(z_0)$ die größtmögliche Kreisscheibe um ein z_0 in G. Dann ist f in $B_d(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickelbar, das heißt analytisch.

11 **Korollar: Erweiterte Cauchysche Integralformel**

Jede in G holomorphe Funktion f ist dort auch analytisch und es gilt:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

12 **Definition: „Fortsetzbarkeit“**

Sei G ein Gebiet, $A \subset G$ abgeschlossen und $f\colon G \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt f nach A holomorph (bzw. stetig) fortsetzbar, wenn es ein holomorphes (bzw. stetiges) $\tilde{f}\colon G \to \mathbb{C}$ gibt sodass $\tilde{f}|_{G \setminus A} = f$.

13 **Definition: „Diskretheit“**

Eine Menge heißt diskret, wenn sie nur aus isolierten Punkten besteht.

14 **Satz: Riemannscher Fortsetzungssatz**

Sei $A \subset G$ diskret und abgeschlossen sowie $f\colon G \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist nach A holomorph fortsetzbar.
2. f ist nach A stetig fortsetzbar.
3. Für jeden Punkt $a \in A$ gibt es eine Umgebung auf der f beschränkt ist.
4. Für jedes $a \in A$ gilt $\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0$.

9.3 Anwendung / Beispiele

15 **Satz: Fundamentalsatz der Algebra**

Jedes nicht-konstante Polynom $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ besitzt eine Nullstelle.

Beweis (9.15) Annahme P besitzt kein Nullstelle. Dann ist $\frac{1}{P}$ holomorph und es gibt ein $q > 0$ mit $\forall z \in \mathbb{C}\colon |P| > q$. Also ist $\frac{1}{P}$ beschränkt und somit konstant. Damit ist auch P konstant im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit muss P eine Nullstelle besitzen. □

16 **Satz: Die Cauchy-Abschätzungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe**
Ist f holomorph in G und $\overline{B_R(z_0)} \subset G$ für $z_0 \in G$, $f(z_0+h) = \sum_{j\geq 0} a_j(z_0)h^j$, $a_j(z_0) \cdot \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$, $|h| \leq R$ und gilt $\sup_{|\zeta - z_0|=R}|f(\zeta)| =: M$, so gilt die Abschätzung $|a_j(z_0)| \leq \frac{M}{R^j}$.

Beweis (9.16) Nach der Integralformel gilt:

$$\begin{aligned} a_j(z_0) &= \frac{f^{(j)}}{j!} \\ &= \frac{1}{j!}(\frac{d}{dz})^j_{z-z_0})\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}}d\zeta \end{aligned}$$

also

$$|a_j(z_0)| = \frac{1}{2\pi}2\pi R\frac{M}{R^{j+1}} = \frac{M}{R^j}\square$$

17 **Satz: Satz von Liouville**
Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe und beschränkte Funktion ist konstant.

Beweis (9.17) Mit der obigen Abschätzung

9.4 Diskussion des Entwicklungssatzes

f holomorph in G, $B_R(z_0) \subset eqG$, $z_0 \in G$

1. f_1, f_2 holomorph in $G \Rightarrow$ Potenzreihen addieren sich.
2. $f_1 \cdot f_2$ ist absolut konvergent

18 **Bemerkung: über Reihenprodukte, N.H. Abel**
Sei $\sum_{j\geq 0} a_j = A$ $\sum_{k\geq 0} b_k = B$ $\sum_{l\geq 0} c_l = C$ wobei $c_l = \sum_{k+j=l} a_j \cdot b_k$ das Cauchy-Produkt ist. Dann ist $AB = C$

Beweis (9.18) Die Potenzreihe $\sum a_j z^j$, $\sum b_k z^k$ haben den Konvergenzradius größer gleich 1. Also sind f, g holomorph in $|z| < 1$ und stetig in $z = 1$ (Satz von Abel).

9.4.1 Bestimmung des Konvergenzradius

Betrachte $f(z) := \frac{z}{e^z - 1}$ ist holomorph für $e^z \neq 1$ und für $z = 0$. f ist holomorph für $|z| < 2\pi$ also ist dort die Potenzreihe konvergent. Aber nicht für ein $R > 2\pi$, wegen Holomorphie. $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{j\geq 0} \frac{B_j}{j!} z^j$, $(B_j)_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{X}$ die Bernoulli-Zahlen.

Anwendung: Berechne die Potenzsummen $S(n,k) := \sum_{j=1}^{n} j^k$, $S(n,1) = \frac{n(n+1)}{2}$
Betrachte dabei

$$1 + e^w + e^{2w} + \cdots + e^{nw} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S(n,k)}{k!} w^k$$

$$\frac{e^{nw}-1}{e^w-1} = 1 + e^w + \cdots + e^{(n-1)w}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S(n-1,k)}{k!} w^k = \frac{e^{nw}-1}{e^w-1} = \frac{w}{e^w-1} \frac{e^{nw}-1}{w}$$

$$= \sum_{j\geq 0} \frac{B_j}{j!} w^j \sum_{l\geq 1} \frac{n^l w^{l-1}}{l!}$$

$$= \sum_{j\geq 0} \frac{B_j}{j!} w^j \sum_{l\geq 0} \frac{n^{l-1} w^l}{(l+1)!}$$

19 **Korollar:**

Seien f,g holomorph in $\mathbb{C}$ ohne gemeinsame Nullstellen in $\mathbb{C}^*$ und mit $\inf\{|z| : z \in g^{-1}(0) \cap \mathbb{C}^*\} = c > 0$ Ferner sei: $\lim_{z\to 0} \frac{f(z}{g(z)} = d \in \mathbb{C}$. Dann hat die Potenzreihe von $\frac{f}{g}$ um 0 den Konvergenzradius c.

Beweis (9.19) $\frac{f}{g}$ ist holomorph in $0 < |z| < c$, aber auch in 0 nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz, also ist der Konvergenzradius größer gleich c. Aber $\lim_{z\to z_0} |\frac{f}{g}(z)| = \infty$
$f(z) := \sum_{j\geq 0} \varrho_i (z-z_0)^j$, $|z - z_0| < G$

Beispiele

1. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus 1$ also ist der Konvergenzradius der Potenzreihe von f um $z_0 \neq 1$ gleich $|z_0 - 1|$.
2. $f(z) = \sum_{j\geq 0} z^{j!}$ (Lückenreihe)

   Wir nennen f über $|z| < 1$ hinaus analytisch fortsetzbar, wenn es z_0 gibt mit $|z_0| = 1$ und g holomorph in einer Kreisscheibe $B_2(z_0)$, $\epsilon > 0$, und $f|B_\epsilon(z_0) \cap B_1(0) = g|B_\epsilon(z_0) \cap B_1(0)$.

   f ist über keinen Punkt von $B_1(0)$ hinaus fortsetzbar. Denn setze $z = re^{2\pi\frac{p}{q}}$, $0 \leq r < 1 \Rightarrow$ für $n \geq q$ gilt $z^{n!} = r^{n!} e^{2\pi\frac{p}{q}} = r^{n!}$, das heißt $f(re^{2\pi\frac{p}{q}}) = \sum_{j=0}^{q-1} p^{j!} + \sum_{j\geq n} r^{j!} \xrightarrow{g\to 1} \infty$. Man sagt der Einheitskreis ist die natürliche Grenze für f.
3. Kreiskettenverfahren

   Sei $f(z) = \sum_{j\geq 0} a_j z^j$, $R_0 = 1$ (z.B. $\frac{1}{1-z}$)

   - 1. Schritt

     Entwicklung in z_1: $\sum_{j\geq 0} a_j(z_1)(z-z_1)^j$. Der Konvergenzradius ist allgemein unklar. Wir wissen nur, dass $R_t \geq 1 - |z_1|$. Wenn wir Glück haben, finden wir $G' \supset \{0, 2\}$

und eine in G' holomorphe Funktion g mit $g|_{B_1(0)} = f$ Dann heißt g die holomorphe Fortsetzung von f längs c_i. Allerdings kann g von c_i abhängen.

Beispiel: Für $x \in R$, $|x| < 1$ gilt $\ln(1+x) = \sum_{j\geq 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j$. Und in $\mathbb{C}$ $\ln w = \ln|w| + i \arg w$, $-\pi < \arg w < \pi$.

Solche Funktionen können holomorph fortgesetzt werden, auf ihre „Riemannsche Fläche“ = 2 dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$, die außerdem „komplex“ ist.

20 **Satz: Hadamards Lückensatz**

$f(z) = \sum_{j\geq 0} z^{\lambda_j}$ mit $(\lambda_j) \subset \mathbb{N}$ eine Folge so, dass $\lambda_{j+1} - \lambda_j \geq c\lambda_j$, $c > 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}_+$. Dann hat f den Einheitskreis als natürliche Grenze.

21 **Satz: Entwicklungssatz**

Ist f holomorph in G, $z_0 \in G$, so besitzt f einen konvergente Potenzreihe in z_0 mit dem Konvergenzradius $R_{z_0} \geq d(z_0, \partial G)$,

$$f(z_0 + h) = \sum_{j\geq 0} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} h^j \qquad |h| < R_{z_0}$$

9.5 Die fundamentalen Eigenschaften holomorpher Funktionen

22 **Satz: Hauptsatz**

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \mapsto \mathbb{C}$ stetig, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

1. f ist in G holomorph, d.h. in jedem Punkt von G komplex differenzierbar.
2. Für jedes Dreieck $\Delta := \Delta(z_0, z_1, z_2) \subset G$ gilt $\int_{\partial\Delta} dz = 0$.
3. f ist in G integrabel, d.h. $\exists F\colon G \mapsto \mathbb{C}$ holomorph mit $F' = f$ in G.
4. Für jedes $z \in G$ und $\overline{B_r(z)} \subset G$ ist $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta}{\zeta - z} d\zeta$
5. f ist in jedem Punkt $z \in G$ in einer konvergente Potenzreihe entwickelbar mit Konvergenzradius $R_z \geq d(z, \partial G) > 0$

- Riemann konzentrierte sich auf Holomorphie
- Cauchy ist natürlich für seine Integralformel bekannt
- Weierstrass benutzte vor allem konvergente Reihen

23 **Satz: Identitätssatz**

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g\colon G \mapsto \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

1. $h := f - g = 0$ in G.

2. $h^{-1}(0)$ besitzt einen Häufungspunkt in G
3. Es gibt $z_0 \in G$ mit $h^{(k)}(z_0) = 0, k \in \mathbb{Z}_+$

Beweis (9.23)

1) ⇒ 2) trivial

2) ⇒ 3) Es sei $w \in G$ ein Häufungspunkt von $h^{-1}(0)$. Annahme: $h^{(k)}(0) \neq 0$ für ein $k \in \mathbb{Z}_+$, oBdA sei k minimal $\Rightarrow h(c+w) = \sum_{j \geq k} \frac{h^{(j)}(c)}{j!} w^j = w^k \sum_{j \geq 0} \frac{h^{(j+k)}(c)}{(j+1)!} w^j = w^k (\frac{h^{(j)}(c)}{k!} + 0(w))$
Für $|w| < R_c \Rightarrow h^{-1}(0) \cap B_{R_c}(c) = c$ ist ein Widerspruch.

3) ⇒ 1) Nach dem Entwicklungssatz gilt $h(z) = 0$ für $z \in B_\varepsilon(c) \subset G$ für ein $c \in G, z > 0$ $\Rightarrow h^{-1}(0) \neq \emptyset$

Wir ersetzen $h^{-1}(0)$ durch $H := \left\{z \in G, h^{(k)}(z) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+\right\} \subset h^{-1}(0)$ a) H ist offen in G b) H ist abgeschlossen in G: ist $(z_n) \subset H$, $z_n \to z$ in $G \Rightarrow \lim_{n\to\infty} h^{(k)}(z_n) = h^{(n)}(z)$ $\Rightarrow z \in H$.

Dies ist ein Widerspruch, denn G ist wegzusammenhängend.

9.5.1 Folgerung

Ist f holomorph, nicht konstant in G, $a \in \mathbb{C} \Rightarrow f^{-1}(a)$ ist diskret und abgeschlossen in G, insbesondere ist $f^{-1}(a) \cap K$ endlich für $K \subset G$ kompakt.

9.5.2 Folgerung

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gibt es höchstens eine holomorphe Funktion F auf $G \supset I$, die f fortsetzt, d.h. $F|_I = f$

9.5.3 Folgerung

Ist f holomorph in $\mathbb{C}$ mit kompaktem Träger, dann ist $f \equiv 0$.

24 **Definition: „Menge aller holomorphen Funktionen"**
$\mathcal{O}(G)$ ist die Menge der auf dem Gebiet G holomorphen Funktionen.

Beispiel Betrachte $f(z) = \sin \frac{z+1}{z-1}$ in $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Dann ist $f(z_k) = 0 \Leftrightarrow \frac{z_k+1}{z_k-1} = k\pi \Leftrightarrow z_k + 1 = k\pi \left(z_k - 1\right) \Leftrightarrow k\pi + 1 = z_k (k\pi - 1) \Leftrightarrow z_k = \frac{k\pi-1}{k\pi+1} \xrightarrow{|k|\to\infty} 1$.

9.5.4 Eine Verschärfung der Cauchy-Abschätzung

Sei $f \in \mathcal{O}(B_R(z_0))$, $f(z_0 + h) = \sum_{j\geq 0} a_j h^j$, $a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(z_0)$.
$f(z_0 + h) = \sum_{j\geq 0} a_j r^j e^{ijt}$, $h = re^{it}$, $0 \leq r < R$, $t \in [0, 2\pi]$

25 **Satz: Satz von Gutzmer**

Unter den obigen Voraussetzungen gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{it})|^2dt = \sum_{j\geq 0}|a_j|^2r^{2j}$$

Beweis (9.25)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{it})|^2dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\sum_{j\geq 0}\overline{a_j}r^je^{-ijt}dt\\ &= \sum_{j\geq 0}\overline{a_j}r^j\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})e^{-ijt}dt\\ &= \sum_{j\geq 0}\overline{a_j}r^j\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\geq 0}a_kr^ke^{i(k-j)t}dt\\ &= \sum_{j\geq 0}\overline{a_j}r^j\sum_{k\geq 0}a_kr^k\delta_{kj} = \sum_{j\geq 0}|a_j|^2r^{2j}\square\end{aligned}$$

26 **Satz: Maximumprinzip**

Sei $f\in\mathcal{O}(G)$ und $|f|$ besitze in $z_0\in G$ ein lokales Maximum um z_0, dann ist $f(z)=f(z_0)$ in G.

Beweis (9.26) Sei $z_0\in G$ ein lokales Maximum von $|f|$ in $B_\varepsilon(z_0)\subset G$. Dann gilt für $0<r<\varepsilon$

$$\begin{aligned}&\sum_{j\geq 0}|a_j|^2r^{2j} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{it})|^2dt = |a_0|^2\\ &\Rightarrow \sum_{j\geq 1}|\frac{1}{j!}f^{(j)}(z_0)|^2r^{2j} = 0\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung mit dem Identitätssatz. □

9.5.5 Die Konvergenzsätze von Weierstraß

$(f_n)\subset\mathcal{O}(G)$ sei eine punktweise konvergente Folge.

27 **Definition: „lokal gleichmäßige Konvergenz“**

(f_n) heißt lokal gleichmäßig konvergent $\Leftrightarrow$ zu jedem $z\in G$ existiert eine ε-Umgebung, so dass (f_n) in dieser Umgebung gleichmäßig konvergiert.

28 **Definition: „kompakte Konvergenz“**

(f_n) heißt kompakt konvergent $\Leftrightarrow$ zu jedem Kompaktum $K \subset G$ existiert ein offenes U_K, $K \subset U_K \subset G$, so dass (f_n) in U_k gleichmäßig konvergiert.

Offensichtlich bedeuten diese beiden Begriffe das selbe.

29 **Satz: Satz von Weierstraß**

Es sei $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ in G kompakt konvergent gegen f. Dann ist f holomorph und für jedes $k \in \mathbb{Z}_+$ konvergiert $(f_n^{(k)})$ kompakt gegen $f^{(k)}$.

Beweis (9.29) Es sei $z_0 \in G$ beliebig und $\overline{B_{2\varepsilon}(z_0)} \subset G$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $z \in B_\varepsilon(z_0)$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_{2\varepsilon}(z_0)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Wegen gleichmäßiger Konvergenz für ε hinreichend klein, ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{\partial B_{2\varepsilon}(z_0)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_{2\varepsilon}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Analog folgt

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_{2\varepsilon}(z_0)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)} = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_{2\varepsilon}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = f^{(k)}(z)$$

□

30 **Satz: Doppelreihensatz von Weierstraß**

Sei $\sum_{j\geq 0} f_j$ in G kompakt konvergent und es sei

$$f_j(z_j + h) = \sum_{k\geq 0} a_{jk} h^k$$

für $z_1 + h \in G$, $|h| < \varepsilon$. Dann besitzt f die Potenzreihenentwicklung

$$f(z_j + h) = \sum_{j\geq 0} \sum_{k\geq 0} a_{jk} h^k = \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j\geq 0} a_{jk} \right) h^k$$

31 **Definition: „gleichgradige Stetigkeit“**

$\mathcal{A} \subset C(X)$ heißt gleichgradig stetig, wenn $\forall x \in X, \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x, \varepsilon)$ so dass $\forall f \in \mathcal{A}, y \in X$: $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

32 **Satz: Satz von Arzela-Ascoli**

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{A} \subset C(X)$ beschränkt. Wenn $\mathcal{A}$ gleichgradig stetig ist, dann ist $\mathcal{A}$ in $C(X)$ präkompakt.

33 **Satz: Satz von Montel**

Sei $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ in G lokal beschränkt. Dann besitzt (f_n) eine in G kompakt konvergente Teilfolge.

Beweis (9.33)

1. (f_n) ist in der kompakten Menge $K \subset \overline{U_k} \subset G$ beschränkt. Wir wollen den Satz von Arzela-Ascoli benutzen, um eine in $\overline{U_k}$ gleichmäßig konvergente Teilfolge zu konstruieren. Dazu genügt es zu zeigen, dass (f_n) in $\overline{U_K}$ gleichgradig stetig ist. Wähle $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(z_0)$ mit $\overline{B_{2\varepsilon_0}(z_0)} \subset G$, dann gilt für $\varepsilon_1 \in B_{\varepsilon_0}(z_0)$.

   $f_n(z_0) - f_n(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{2\varepsilon_0}(z_0)} f_n(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta - z_1} \right) d\zeta = \frac{z_0 - z}{2\pi i} \int_{\partial B_{2\varepsilon_0}(z_0)} \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)}$ $|f_n(z_0) - f_n(z_1)| \leq |z_0 - z_1| 2\varepsilon_0 M \varepsilon_0^{-2} = \frac{\varepsilon M}{\varepsilon_0} |z_0 - z_1|$ Damit haben wir die gleichmäßige Stetigkeit mit einer speziellen Teilfolge für jedes Kompaktum.

2. Wir konstruieren eine monotone Folge (K_n), $n \in \mathbb{N}$ von kompakten Teilmengen von G mit $\bigcup K_n = G$ (kompakte Ausschöpfung), z.B. $K_n = \{z \in G \colon |z| \leq n, d(z, \partial G)\} \geq \frac{1}{n}$ Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ konstruieren wir auf K_m eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n,1})$, so dass $(f_{m+1,n})$ Teilfolge von $(f_{m,n})$. Denn setzen wir $g_n := f_{n,n}$ und erhalten eine kompakt konvergente Teilfolge. $\square$

34 **Satz: Satz von Stone-Weierstraß**

Sei (X, d) sei ein kompakter metrischer Raum und $C(X) = C(X, \mathbb{C})$ der metrische Raum mit $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$. Es sei $\mathcal{A} \subset C(X)$ eine *-Algebra über $\mathbb{C}$ mit Eins, die die Punkte von X trennt, dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C(X)$. Genauer:

1. $f, g \in \mathcal{A}, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{A}$

   $f \cdot g \in \mathcal{A}$

2. $1_X \in \mathcal{A}$

3. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$

4. $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists f \in \mathcal{A} \colon f(x_1) \neq f(x_2)$

Folgerung aus dem Satz von Montel Es sei $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ lokal beschränkt. Dann sind für ein $f \in \mathcal{O}(G)$ die folgenden Bedingungen äquivalent

1. (f_n) konvergiert kompakt gegen f.

2. Jede kompakt konvergente Teilfolge von (f_n) konvergiert gegen f.

Beweis (Folgerung)

(1) => (2) ist trivial

(2) => (1) Es sei $z_0 \in G$. Es ist zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty}(z_0) = f(z_0)$. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge $f_{n_j}(z_0)$ mit $|f_{n_j} - f(z_0)| \geq \varepsilon_0$. $(f_{n_j}) \subset \mathcal{O}(G)$ erfüllt dieselben Voraussetzungen wie (f_n), kann aber keine kompakt konvergente Teilfolgen besitzen. Dies steht im Widerspruch zum Satz von Montel. Also gilt $(f_n)(z) \to f(z)$ für alle $z \in G$.

Sei nun $z_0 \in G$, $\overline{B_{2\varepsilon_0}(z_0)} \subset G$. Es ist zu zeigen dass (f_n) in $B_{e_0}(z_0)$ gleichmäßig konvergiert. Nach der Cauchyschen Integralformel ist für $z \in B_{\varepsilon_0}(z_0)$

$$\begin{aligned}
|f(z) - f_n(z)| &= |\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_{2\varepsilon_0}(z_0)} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \oint_{\partial B_{2\varepsilon_0}(z_0)} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| d\zeta \\
&\geq \frac{M}{2\pi\varepsilon_0} \|f - f_n\| && \text{nach dem Satz von Lebesgue}
\end{aligned}$$

35 **Satz: Satz von Vitali**

Für eine lokal beschränkte Folge $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent

1. (f_n) konvergiert kompakt gegen $f \in \mathcal{O}(G)$
2. $\exists z_0 \in G \quad \forall k \in \mathbb{N}\colon \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0)$
3. Die Menge $\left\{z \in G\colon \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)\right\}$ besitzt einen Häufungspunkt in G

Beweis (9.35)

(1) => (2) Gilt nach dem Satz von Weierstraß.

(2) => (3) Betrachte $\overline{B_{2\varepsilon_0}(z_0)} \subset G$ und für f_n die Potenzreihe um z_0 mit Konvergenzradius $R \geq 2\varepsilon_0$. Sei $|h| \leq \varepsilon_0$.

$$\begin{aligned}
f_n(z_0 + h) &= \sum_{j\geq 0} \frac{f_n^{(j)}(z_0)}{j!} h^j \\
&= \sum_{j\geq 0} \left(\frac{f_n^{(j)}(z_0) - f^{(j)}(z_0)}{j!} \right) h^j + \sum_{j\geq 0} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} h^j
\end{aligned}$$

Nach Cauchy gilt die Abschätzung

$$|\frac{f_n^{(j)}(z_0)}{j!}| \leq \frac{M}{(2\varepsilon_0)^j}$$

Dann können wir abschätzen mit $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{j\geq N=N(\varepsilon)} \frac{1}{j!}\left(f_n^{(j)}(z_0) - f^{(j)}(z_0)\right) h^j|\\
&\leq \sum_{j\geq N} \frac{2M}{(2\varepsilon_0)^j}\varepsilon_0^j\\
&= 2M\sum_{j\geq N}\frac{1}{2^j} \leq \frac{4M}{2^N} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

für $N \geq N(2)$ und alle n. Für $n \geq n(\varepsilon)$ ist

$$
\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}|f_n^{(j)}(z_0) - f^{(j)}(z_0)| < \varepsilon \sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!} = e\varepsilon
$$

(3) => (1) Nach der Folgerung zum Satz von Montel genügt es zu zeigen, dass die Grenzwerte aller kompakt konvergenten Teilfolgen übereinstimmen. Nach Voraussetzung stimmen sei auf M überein, also nach dem Identitätssatz überall. □

9.5.6 Singularitäten am Rande des Konvergenzkreises

Sei $f(z) = \sum_{j\geq 0} a_j z^j$ mit Konvergenzradius 1, dann hat f eine Singularität für $|z| = 1$. Wir sagen: $B_1(0)$ ist das Holomorphiegebiet von f wenn $\partial B_1(0)$ die natürliche Grenze ist.

Problem Was sagt die Folge (a_j) über die Singularitäten auf dem Rand des Konvergenzkreises aus?

spezielle Antworten

1. $f(z) = \sum_{j\geq 1}\frac{z^j}{j^2}$ hat das Holomorphiegebiet $B_1(0)$.
2. Lückensatz von Fabry: $f(z) = \sum_{j\geq 0} a_j z^{m_j}$ mit Konvergenzradius 1 und $\lim_{j\to\infty}\frac{m_j}{j} = \infty$
3. Satz von Fatou-Hurwitz-Pólya: Sei $e_j = \pm 1$ und $f_\varepsilon(z) := \sum_{j\geq 0}\varepsilon_j a_j z^j$ mit Konvergenzradius 1. Dann hat $\left\{f_\varepsilon\colon HG(f_\varepsilon) = B_1(0)\right\}$ die Kardinalität von $\mathbb{R}$.

36 **Satz: Satz von Runge**

Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt so, dass $\mathbb{C}\setminus K$ wegzusammenhängend ist. Dann gibt es zu $f \in \mathcal{O}(K)$ eine Folge $(p_i) \subset \mathbb{C}[z]$, die auf K gleichmäßig gegen f konvergiert.

Folgerung Es gibt eine Folge $(p_n) \subset \mathbb{C}[z]$ mit $\lim_{n\to\infty} p_n(0) = 1, \lim_{n\to\infty} p_n(z) = 0, z \in \mathbb{C}^*$

9.6 Meromorphe Funktionen und der Residuenkalkül

Wir betrachten folgende Situation:

37 **Definition: „isolierte Singularität“**

Es sei G ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$, z_0 ein isolierter Punkt von G^c. Dann heißt z_0 eine isolierte Singularität von f.

1. Fall f ist in $B_\varepsilon(z_0)$ beschränkt $\Rightarrow$ f ist in z_0 holomorph fortsetzbar durch

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

2. Fall f ist in $B_\varepsilon(z_0)$ unbeschränkt.

Beispiele

rationale Funktionen $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ also betrachten wir $G = \mathbb{C} \setminus q^{-1}(0)$

Sei $z_0 \in q^{-1}(0)$ eine Nullstelle von q von der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ und sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $B_\varepsilon(z_0) \cap q^{-1}(0) = \left\{z_0\right\}$. Dann ist $q(z) = (z - z_0)^n \tilde{q}(z)$. Wir schreiben $p(z) = (z - z_0)^m \tilde{p}(z)$. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^{n-m}\frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)} =: (z - z_0)^{n-m} g(z),\ g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$$

Für $m \geq n$ sind wir im Fall 1. Also muss für Fall 2 $m < n$ gelten und $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$, $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^{n-m}}$.

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ Es ist

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} z^{-j}$$

Wir setzen $w := \frac{1}{z}$ für $z \in B_{\frac{1}{z}}(0)$ gilt $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{\frac{1}{z}}(0)}$.

Sei $a \in \mathbb{C}^*$, wir wollen die Gleichung $e^w = a$ lösen. Dann muss gelten

$$\begin{aligned}
|a| &= e^{\operatorname{Re} w} \Leftrightarrow \operatorname{Re} w = \ln|a| \\
\operatorname{Im} w_k &= \arg a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\
w_k &= \ln|a| + i(\arg a + 2\pi k) \\
|w_k|^2 &= (\ln|a|)^2 + (\arg a + 2\pi k)^2 \geq 4\pi^2(|k| - 1)^2 \to \infty
\end{aligned}$$

38 **Satz: Hilfssatz**

In jeder (beliebig kleinen) punktierten Umgebung von 0 kommt die Funktion $e^{\frac{1}{z}}$ jeder komplexen Zahl (einschließlich ∞) beliebig nah.

39 **Satz: Satz von Casorati-Weierstraß**

Es sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und z_0 eine isolierte Singularität von f. Ferner sei f in $\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset G$ für ein $\varepsilon > 0$ unbeschränkt. Dann gilt folgende Alternative:

1. f kommt in jeder punktierten Umgebung von z_0 jedem Wert in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ beliebig nahe
2. Es gibt $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ und $h \in \mathcal{O}(B_{\varepsilon_1}(z_0))$ so, dass $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ für $z \in \dot{B}_{\varepsilon_1}(z_0)$

Beweis (9.39) Wir müssen noch zeigen $\neg(1) \Rightarrow (2)$.

Bezeichne $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

(1) bedeutet, für alle $a \in \overline{\mathbb{C}}, \zeta, \delta > 0$ existiert ein $z \in \dot{B}_\delta(z_0)$ mit

$$|f(z) - a| < \zeta \qquad \text{falls } a \in \mathbb{C}$$
$$|f(z)| > \frac{1}{\zeta} \qquad \text{falls } a = \infty$$

Wenn dies falsch ist, dann gibt es $\alpha_0 \in \mathbb{C}, \zeta_0, \delta > 0$, so dass für $0 < |z-z_0| < \delta$ gilt $|f(z)-a| \geq \zeta_0$ Dann ist $g(z) = \frac{1}{f(z)-\alpha_0}$ beschränkt in $\dot{B}_{\delta_0}(z_0)$, also holomorph und es gilt: $f(z) = a_0 + \frac{1}{g(z)} = \frac{1+a_0(g(z))}{g(z)}$. Weil f unbeschränkt ist, muss g in z_0 eine Nullstelle haben, also ist $a_0|g(z)| < 1$ in $\dot{B}_{\varepsilon_1}(z_0)$ und $h(z) = \frac{g(z)}{1+a_0 g(z)}$ ist dort holomorph, $f(z) = \frac{1}{h(z)}$. □

Folgerung

1. Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann gilt genau einer der folgenden Fälle: $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f$ ist in einer punktierten Umgebung von z_0 beschränkt.
2. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$
3. f kommt in jeder punktierten Umgebung von z_0 jedem Wert in $\overline{\mathbb{C}}$ beliebig nah.

40 **Definition: „Pol, wesentliche Singularität einer Funktion“**

$f \in \mathcal{O}(G)$ habe in z_0 eine isolierte nicht hebbare Singularität. Gilt der Fall 2, so ist f von der Form $f(z) = \frac{\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^k}$, für ein $k \in \mathbb{N}$, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, $\tilde{h} \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$, $\tilde{h}(z_0) \neq 0$. Dann heißt z_0 ein Pol oder eine Polstelle von f von der Ordnung k. Gilt der Fall 3, so heißt z_0 eine wesentliche Singularität von f.

41 **Definition: „Meromorphie“**

Sei G ein Gebiet, $\mathcal{P} \subset G$ eine diskrete Menge und $f \in \mathcal{O}(G \setminus \mathcal{P})$. f heißt meromorph in G, Gesamtheit $\mathcal{M}(G)$, wenn alle $z_0 \in \mathcal{P}$ höchstens Polstellen sind (also keine wesentlichen Singularitäten). Insbesondere ist somit $\mathcal{O}(G) \subset \mathcal{M}(G)$.

Frage Gibt es zu isolierten Singularitäten auch Potenzreihenentwicklungen?

Wir betrachten dazu einen offenen Kreisring mit den Radien $s < r$ um die isolierte Singularität. Indem wir den Kreisring in Viertel teilen, erhalten wir den folgenden Satz:

42 **Satz: Cauchys Integralformel für Kreisringe**

Sei $0 < s < s' < r' < s < \infty$ und $f \in \mathcal{O}(B_{rs}(z_0))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_{r's'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\partial B_{r'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{\partial B_{s'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\partial B_{r'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})} d\zeta + \oint_{\partial B_{s'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{z(1 - \frac{\zeta}{z})} d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j \geq 0} z^j \oint_{\partial B_{r'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j-1}} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \geq 0} z^{-k-1} \oint_{\partial B_{s'}(z_0)} \zeta^k f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

43 **Satz: Die Laurent-Entwicklung**

Es sei $f \in \mathcal{O}(B_{r,s})(z_0)$, $0 \leq s < r \leq \infty$. Dann ist für $z \in B_{r,s}(z_0)$ (dem offenen Kreisring mit den Radien r und s)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r,s}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(z - z_0\right)^j \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} f(\zeta)(\zeta - z)^{-j-1} d\zeta \end{aligned}$$

für jedes $\rho \in (s, r)$.

$$f(z) = \left(\sum_{j \geq 0} + \sum_{j=-\infty}^{-1} \right) a_j (z - z_0)^j =: f_{reg}(z) + f_{sing}(z)$$

wobei $f_{reg} \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$ und $f_{sing} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{B_s(z_0)})$.

44 **Satz: 9.60**

Es sei $f \in \mathcal{O}(g \setminus \{z_0\})$, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent

1. f hat in z_0 einen Pol positiver Ordnung
2. Es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \subset G$ und $h \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$, so dass $f|\dot{B}_\varepsilon(z_0) = \frac{1}{h}|\dot{B}_\varepsilon(z_0)$
3. Es gibt $g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$, so dass $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \dot{B}_\varepsilon(z_0)$
4. Es gibt $M > 0$, so dass für $z \in \dot{B}_\varepsilon(z_0)$

$$M^{-1}|z - z_0|^{-1} \leq |f(z)| \leq M|z - z_0|^{-1}$$

45 **Definition: „Indexfunktion“**

Es sei $c\colon [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ ein geschlossener stückweiser C^1-Weg. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im} c$ ist dann

$$\operatorname{ind}_C(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die „Windungszahl“ von c bezüglich z.

46 **Satz: Eigenschaften von** ind_c

1. $\operatorname{ind}_c\colon \mathbb{C} \setminus \operatorname{im} c \to \mathbb{Z}$
2. ind_c ist stetig in $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im} c$
3. Sind c_1 und c_2 geschlossene, stückweise C^1-Wege mit demselben Anfangspunkt, so ist $\operatorname{ind}_{c_1 * c_2} = \operatorname{ind}_{c_1} + \operatorname{ind}_{c_2}$.

Beweis (9.46)

1. Hilfssatz: Es sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Ferner sei $d\colon [0,1] \mapsto G$ ein Weg. Dann gilt

   $$e^{\int_d \frac{f'}{f}(\zeta) d\zeta} = \frac{f(c(1))}{f(c(0))}$$

   Wenden wir dies nun auf

   $$\begin{aligned} e^{2\pi i \operatorname{ind}_c(z)} &= e^{\int_c \frac{d\zeta}{\zeta - z}} = e^{\int_c \frac{f'(\zeta) d\zeta}{f(\zeta)}} \\ &= \frac{f(c(1))}{f(c(0))} = 1 \end{aligned}$$

   $$\Leftrightarrow 2\pi i \operatorname{ind}_c(z) = 2\pi i k$$

2. $$\operatorname{ind}_c(z_1) - \operatorname{ind}_c(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{d\zeta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} (z_1 - z_2)$$

   $$z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im} c, z_2 \in B_\delta(z_1) \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{im} c$$

   $$d(z_1, \operatorname{im} c) = \delta_1 = \delta_1(z_1)$$

   $$d(z_2, \operatorname{im} c) \geq \delta_1 - \delta \geq \frac{\delta_1}{2} \text{für} \delta \leq \frac{\delta_1}{2}$$

   $$\Rightarrow |\operatorname{ind}_c(z_1) - \operatorname{ind}_c(z_2)| \leq \delta \frac{L(c)}{2\pi} \left(\frac{2}{\delta_1} \right)^2 < \varepsilon \text{für} \delta \leq \delta(\varepsilon)$$

3. trivial

47 **Definition: „Das Äußere und Innere einer Kurve“**

Ext $c := (\mathrm{ind}_c)^{-1}(0)$ ist das Äußere von c
Int $c := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}\, c : \mathrm{ind}_c(z) \neq 0 \right\}$ ist das Innere von c.

Bemerkung Dann sind Int c und Ext c offen und $\mathbb{C} = \mathrm{Ext}\, c \cup \mathrm{Int}\, c \cup \mathrm{im}\, c$

48 **Satz: Der allgemeine Integralsatz**

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, c ein geschlossener stückweise C^1-Weg in G. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent

1. Für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ gilt
$$\int_c f(\zeta) d\zeta = 0$$
2. Int $c \subset G$
3. Für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ und $z \in G \setminus \mathrm{im}\, c$ gilt
$$\mathrm{ind}_c(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Beweis (9.48) 1) $\Rightarrow$ 2)

Die Behauptung folgt, wenn Ext $c \supset \mathbb{C} \setminus G$. Sei nun $z \notin G \Rightarrow G \ni \zeta \mapsto (\zeta - z)^{-1} \in \mathbb{C}$ ist holomorph in G, also

$$0 = \int_c \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i\, \mathrm{ind}_c(z)$$

2) $\Rightarrow$ 3)

Wir schreiben die Integralformel in der Form

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta =: h(z), z \notin \mathrm{im}\, c$$
$$\mathbb{C} \setminus ((\mathrm{im}\, c) \cup \mathrm{Int}\, c) = \mathrm{Ext}\, c$$

Wir betrachten jetzt die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in \mathrm{Ext}\, c$$

dort gilt

$$\lim_{z \to \infty} g(z) = 0 = \lim_{z \to \infty} h(z)$$

Nun ist h holomorph in $G \setminus \operatorname{im} c$, aber auch in $\operatorname{im} c$, denn für $z \in \operatorname{im} c$ ist

$$\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} = \sum_{j\geq 0} \frac{f^{(j)}(z)}{j!}(\zeta - z)^{j-1}$$

Das heißt h ist stetig in G und damit nach Riemann holomorph. Also ist h holomorph in $\operatorname{Ext} c \cup G = \mathbb{C}$. $\Rightarrow h = 0$ nach dem Satz von Liouville.

Besseres Argument: Es genügt zu zeigen, dass der Integrand von h stetig ist in $G \times G$. Das ist klar in allen Punkten (ζ, z) mit $\zeta \neq z$. Zu zeigen: h ist stetig in (z_0, z_0), $z_0 \in G$. Sei also $|\zeta - z_0|, |z - z_0| < \delta$ mit $B_j \subset G \Rightarrow$

$$f(\zeta) = \sum_{j\geq 0} a_j(\zeta - z_0)^j, f(z) = \sum_{j\geq 0} a_j(z - z_0)^j$$

$$f(\zeta) - f(z) = 0 + a_1(\zeta - z_0) - a_1(z - z_0) + \sum_{j\geq 2} a_j \left((\zeta - z_0)^j - (z - z_0)^j\right)$$

$$= a_i(\zeta - z) + \sum_{j\geq 2} a_j(\zeta - z) \sum_{k+l=j-1} (\zeta - z_0)^k(z - z_0)^l$$

$$|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0)| \leq \sum_{j\geq 2} |a_j| j r^{j-1} \leq Cr$$

3) $\Rightarrow$ 1)
Wähle dazu $z \in G \setminus \operatorname{im} c$ und setze $g(\zeta) := (\zeta - z)f(\zeta) \Rightarrow g \in \mathcal{O}(G)$. Nach (3) folgt

$$0 = \int_c \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_c f(\zeta) d\zeta$$

□

49 **Definition: „Nullhomologie"**
Ein Weg mit den eben benannten äquivalenten Eigenschaften heißt nullhomolog.

Beispiele

1. S^1 ist nicht nullhomolog in $\mathbb{C}^*$, denn $\int_{S^1} \frac{d\zeta}{\zeta} \neq 0$ Der Index der inneren Punkte ist 1 oder -1 je nach Umlaufsinn
2. Nimmt man zwei sich berührende Kreise, kann man wieder indem man den Umlaufsinn variiert, die Indizes für die beiden nicht zusammenhängenden Gebiete die das Innere ergeben, den Index 1 oder -1 erhalten.

50 **Definition: „einfach geschlossene Wege"**
Ein geschlossener stückweiser C^1 Weg in G, mit nicht-leerem Inneren heißt einfach geschlossen, wenn gilt

$$\forall z \in \operatorname{Int} c : \operatorname{ind}_c z = 1$$

Erweiterung der Indexfunktion für stetige Wege Es gilt für jede Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ mit

$$|c(t_{i+1}) - c(t_i)| < |c(t_i) - z|$$

Dann folgt für $z \notin \operatorname{im} c$

$$\int_c \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \ln \prod_{i=1}^{N-1} \frac{c(t_i) - z}{c(t_{n+1}) - z} := \operatorname{ind}_c(z)$$

als topologische Definition der Windungszahl mit den selber Eigenschaften wie die bekannte Indexfunktion.

51 **Satz: Jordanscher Kurvensatz**

Es sei c ein injektiver, geschlossener, stückweise C^1-Weg in $\mathbb{C}$. Dann sind $\operatorname{Ext} c$ und $\operatorname{Int} c$ zusammenhängend und $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im} c = \operatorname{Ext} c \cup \operatorname{Int} c$. $\operatorname{Ext} c$ ist unbeschränkt. $\operatorname{Int} c$ ist beschränkt und homöomorph zu $B_1^{\mathbb{C}}(0)$.

Bemerkung Jeder geschlossene Weg c in G ist nullhomolog genau dann, wenn $\pi_1(G, z_0)$ für $z_0 \in G$ trivial ist. Das bedeutet insbesondere dass jeder geschlossene Weg in G stetig auf einen Punkt zusammenziehbar ist.

52 **Definition: „Residuum“**

Es sei $f \in \mathcal{O}(\dot{B}_\varepsilon(z_0))$ und

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{j+1} d\zeta (z - z_0)^j \quad \text{Für alle } \rho \in (0, \varepsilon) \end{aligned}$$

Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_k f(z_0) &:= a_{-k}(f, z_0), k \in \mathbb{Z}_+ \\ \operatorname{Res} f(z_0) &:= \operatorname{Res}_1 f(z_0) \\ \Rightarrow \operatorname{Res} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

53 **Satz: Residuensatz**

Es sei G ein Gebiet, c ein geschlossener nullhomologer Weg in G, $A \subset G$ eine endliche Menge und $f \in \mathcal{O}(G \setminus A)$. Dann gilt

$$\int_c f(\zeta) d\zeta = \sum_{z \in A} 2\pi i \operatorname{Res} f(a) \operatorname{ind}_c z$$

Beweis (9.53) Zu $z \in A$ bestimmen wir die Laurent-Entwicklung mit der Zerlegung

$$f = f_{\text{reg},z} + f_{\text{sing},a}$$

Betrachten wir

$$f - \sum_{z \in A} f_{\text{sing},z} \in \mathcal{O}(G)$$

Also folgt

$$\int_c f(\zeta) d\zeta = \sum_{z \in A} \int_c f_{\text{sing},z}(\zeta) d\zeta$$

Wir schreiben

$$f_{\text{sing},z}(\zeta) = a_{-1}(f,z)(\zeta - a)^{-1} + \sum_{j \leq -2} a_j(f,z)(\zeta - a)^j$$

Der zweite Summand besitzt jedoch eine Stammfunktion, und somit folgt

$$\begin{aligned} \int_c f_{\text{sing},z}(\zeta) d\zeta &= a_{-1}(f,z) \int_c \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} f(z) \operatorname{ind}_c z \end{aligned}$$

□

9.7 Berechnungsregeln des Residuums

54 **Lemma: Hilfssatz**

Sei $f \in \mathcal{O}(G \setminus \{z_0\})$, $z_0 \in G$ ein Pol erster Ordnung von f. Dann ist $\operatorname{Res} f(z_0) = a$ die eindeutig bestimmte Zahl $a \in \mathbb{C}$ mit $f(z) - a(z - z_0)^{-1} =: h(z)$ und $h \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$.

Folgerung Seien $f, g \in \mathcal{O}(G \setminus \{z_0\}), a, b \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(af + bg)(z_0) = a \operatorname{Res} f(z_0) + b \operatorname{Res} g(z_0)$$

Der Beweis kann über die Linearität des Integrals geführt werden.

55 **Regel: Regel (Beobachtung)**

Sei $z_0 \in G$ ein einfacher Pol von $f \in \mathcal{O}(G \setminus \{z_0\}$, so gilt

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Beweis (9.55) Nach dem Hilfssatz gilt

$$f(z) = a_1(z - z_0)^{-1} + h(z) \qquad , h \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0)), z \in B_\varepsilon(z_0)$$
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a_1 + \lim_{z \to z_0} (z - z_0) h(z) = 0$$

56 **Lemma:**
Sei $z_0 \in G, g, h \in \mathcal{O}(G)$ mit $g(z_0) \neq 0, h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$. Dann hat $f := \frac{g}{h}$ einen einfachen Pol bei z_0 und es gilt $\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Beweis (9.56) h ist holomorph und lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln

$$h(z) = 0 + h'(z_0)(z - z_0) + \dots$$

und dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h(z)}(z - z_0)\\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h'(z)} + \dots = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\end{aligned}$$

Insbesondere hat f einen Pol erster Ordnung und es gilt die behauptete Aussage für das Residuum.

57 **Beobachtung: Beobachtung**
Hat $f \in \mathcal{M}(G)$ in z_0 einen Pol höchstens n-ter Ordnung und ist g die holomorphe Fortsetzung von $(z - z_0)^n f(z)$ nach z_0, dann gilt

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0)$$

Beweis (9.57) Um z_0 ist f in eine Laurent-Reihe entwickelbar

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{(z - z_0)^j} + h(z), \qquad h \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))\\ g(z) &= (z - z_0)^n f(z)\\ &= b_n + b_{n-1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{n-1} + \tilde{h}(z)\\ \operatorname{Res} f(z_0) = b_1 &= \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0)\end{aligned}$$

Bemerkung Für wesentliche Singularitäten gibt es keine „einfache“ Berechnungsmöglichkeit.

9.7.1 Beispiele

1.

$$f(z) = \frac{z}{1+z^n}$$

f hat Pole bei $e^{\frac{1}{n}i\pi} := z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, iz_0, $-z_0$ und $-iz_0$ und man rechnet nach, dass $z0_{-1} = \overline{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}z_0^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)$$
$$\text{Res } f(iz_0) = \frac{i}{4\sqrt{2}}(1-i)$$
$$\text{Res } f(-z_0) = \frac{-1}{4\sqrt{2}}(1-i)$$
$$\text{Res } f(-iz_0) = \frac{-i}{4\sqrt{2}}(1-i)$$

2. Sei $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $g(z_0) \neq 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0^n = -1$, $n \in \mathbb{N}$ und $f(z) := \frac{g(z)}{1+z^n}$, dann hat f einen einfachen Pol bei z_0 und

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{g(z_0)}{nz_0^{n-1}} = \frac{-z_0}{n} g(z_0)$$

3. Sei $1 < p \in \mathbb{R}$, $R(z) = \frac{4z}{(z^2+pz+1)^2}$. Seien $c = -p + \sqrt{p^2-1}$ und $d = -p - \sqrt{p^2-1}$. Dann gilt $R(z) = \frac{4z}{(z-c)^2(z-d)^2}$ und c, d sind Pole von R der Ordnung 2. Sei $g(z) := 4z(z-d)^2$ ist die holomorphe Fortsetzung von $(z-c)^2R(z)$ nach c.

$$g'(z) = 4(z-d)^{-2} + 4z(z-d)^{-3} \cdot (-2) = 4(z-d)^{-2}(1 - 2z(z-d)^{-1})$$
$$g'(c) = -4(c+d)(c-d)^{-3}$$
$$\text{Res } R(c) = \frac{1}{(2-1)!} g^{(2-1)}(c) = -4(c+d)(c-d)^{-3} = \frac{p}{(p^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

58 **Korollar: Folgerung**

Sei $z_0 \in G$, $g, h \in \mathcal{O}(G)$ und z_0 eine „a-Stelle“ von g der Vielfachheit $V(g, a)$ sowie

$$f(z) := h(z)\frac{g'(z)}{g(z)-a}$$

dann gilt

$$\operatorname{Res} f(z_0) = h(z_0)V(g,n)$$

Beweis (9.58) Sei $n := V(g,a)$, dann ist $g(z) = a + (z - z_0)\tilde{g}(z)$ um z_0 mit $\tilde{g} \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0))$, $\tilde{g}(z_0) \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{g'(z)}{g(z)-a} &= \frac{n(z-z_0)^{n+1}\tilde{g}(z) + (z+z_0)^n\tilde{g}'(z)}{(z-z_0)^n\tilde{g}(z)}\\ &= \frac{n}{z-z_0} + \text{holomorphe Terme in } B_{\tilde{\varepsilon}}(z_0)\end{aligned}$$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \operatorname{Res} f(z) = nh(z_0) \qquad \square$$

9.7.2 Korollar

Als Spezialfall erhält man:
Hat g in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $O(g,z_0) < \infty$, dann hat $\frac{g'}{g}$ einen Pol der Ordnung 1 und $\operatorname{Res} \frac{g'}{g}(z_0) = O(g,z_0)$

9.7.3 Korollar

Hat g in z_0 einen Pol der Ordnung $O(g,z_0)$ und ist h holomorph in $B_\varepsilon(z_0)$ und sie für alle $a \in \mathbb{C}$: $f_a(z) := h(z)\frac{g'(z)}{g(z)-a}$, dann gilt

$$\operatorname{Res} f_a(z_0) = h(z_0)O(g,z_0)$$

9.7.4 Anwendungen des Residuensatzes

1. Trigonometrische Integrale

59 **Beobachtung: Beobachtung**

Sei $R\colon \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ eine rationale Funktion, die auf $\partial B_1(0)$ endlich ist. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = 2\pi \sum_{w\in B_1(0)} \operatorname{Res} \tilde{R}(w)$$

wobei

$$\tilde{R}(z) := \frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

Beweis (9.59) Sei $w = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]$ dann gilt

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w}) \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(w - \frac{1}{w})$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi &= \frac{1}{i}\int_{B_1(0)} R(\frac{1}{2}(w - \frac{1}{w}), \frac{1}{2i}(w - \frac{1}{w}))\frac{1}{w}dw \\ &= \frac{1}{i}\int_{B_1(0)} \tilde{R}(w)dw = 2\pi \sum_{w\in B_1(0)} \text{Res }\tilde{R}(w)\end{aligned}$$

2. Uneigentliche Integrale
   Sei $G \supset \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} = \overline{\mathbb{H}}$ und beschreibe $\Gamma_r\colon [0, \pi] \mapsto \overline{\mathbb{H}}$ den Rand von $B_r(0) \cap \overline{\mathbb{H}}$.

60 **Satz:**

Sei $f \in \mathcal{M}(G)$ mit höchstens endlich vielen nicht-reellen Singularitäten. Wenn $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existiert und $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{w\in\mathbb{H}} \text{Res } f(w)$$

Beweis (9.60) Sei r genügend groß, dann sind alle Singularitäten in $B_r(0)$ enthalten und aus dem Residuensatz folgt

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{w\in\mathbb{H}} \text{Res } f(w)$$

Dabei können wir abschätzen:

$$|\int_{\Gamma_r} f(z)dx| \leq \pi r|f|_{\Gamma_r}$$

Da $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ folgt $\lim_{r\to\infty} r|f|_{\Gamma_r} = 0$. □

61 **Lemma: Wachtumslemma für rationale Funktionen**

Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p = n$, $\deg q = m$, so gibt es reelle Zahlen $K, L, R > 0$ so dass gilt

$$K|z|^{m-n} \leq |\frac{p(z)}{q(z)}| \leq L|z|^{m-n} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0)$$

62 **Korollar:**

Ist $f = \frac{p}{q}$ und $\deg q - \deg p = l$ so gilt

$$\lim_{z\to\infty} z^k f(z) = 0 \qquad \forall 0 \le k < l$$

Insbesondere heißt das für $l \ge 2$ die Voraussetzung für den Satz zur Berechnung der uneigentlichen Integrale erfüllt sind.

Berechnung von reellen Integralen durch Deformation des Integrationsweges Beispielsweise

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{dt}{1+t^2}$$
$$|\int_C^t \frac{d\zeta}{\zeta^2+1}| \le 2\pi R \frac{1}{R^2-1} \to 0$$

Wobei C^t ein Halbkreis mit Radius R ist.

Theoretische Anwendungen

63 **Definition: „Ordnung von Null- und Polstellen meromorpher Funktionen“**

Es sei f in G meromorph mit einer isolierten Polstelle in z_0 und Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{j\le n} a_j (z-z_0)^j \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Ist $a_n = 0$, so setzen wir $O_{z_0}(f) := n$. Für $n > 0$ ist z_0 eine Nullstelle der Vielfachheit n und für $n < 0$ ist z_0 Polstelle der Vielfachheit $-n$. Ist $n = 0$, f also holomorph mit $f(z) = w$, so setzen wir $v(f,z) := O_z(f - f(z))$ also die Vielfachheit der w Stellen z von f.

64 **Satz:**

Es sei $f \in \mathcal{M}(G)$, $\mathcal{P}(f)$ endlich, c nullhomolog in G, $\mathcal{P}(f) \cap \operatorname{im} c = \emptyset$ sowie $w \in \mathbb{C}$ mit $f^{-1}(w)$ endlich in G und $f^{-1}(w) \cap \operatorname{im} c = \emptyset$, $F \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c F(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta = \sum_{z\in \operatorname{Int} c\cap\mathcal{P}(f)} \operatorname{ind}_c(z) O_z(f) F(z) + \sum_{z\in f^{-1}(w)\cap \operatorname{Int} c} v(f,z)F(z)$$

Beweis (9.64) Residuen vom Integranden existieren höchstens an den Stellen z, mit $z \in \mathcal{P}(f)$ oder $z \in f^{-1}(w)$.

Betrachten wir den ersten Fall:

$$f(z) = \sum_{j\geq -n} a_j (z-z_0)^j \qquad a_{-n} \neq 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)-w} &= \frac{(-n)a_{-n}(z-z_0)^{-n-1} + O((z-z_0)^{-n})}{a_{-n}(z-z_0)^{-n} + O((z-z_0)^{-n})} \\
&= \frac{(z-z_0)^{-n-1}}{(z-z_0)^{-n}} \frac{-na_{-n} + O(z-z_0)}{a_{-n} + O(z-z_0)} \\
&= \frac{1}{z-z_0}(-n + O(z-z_0)) \\
\Rightarrow \operatorname{Res}(F\frac{f'}{f-w})(z) &= F(z)(-n) = F(z)O_z(f)
\end{aligned}$$

Der zweite Fall erfolgt analog.

65 **Korollar: Folgerung**

Es gelten die selben Voraussetzungen wie eben für $w = 0$ und c sei sogar einfach geschlossen. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{z\in \operatorname{Int} c \cap \mathcal{P}(f)} O_z(f) + \sum_{z \in \operatorname{Int} c \cap f^{-1}(0)} O_z(f) = \sum_{z\in \operatorname{Int} c} O_z(f) =: N(f, \operatorname{Int} c) - P(f, \operatorname{Int} c)$$

66 **Satz: Fundamentalsatz der Algebra**

$$p \in \mathbb{C}[z] \Rightarrow N(f, \mathbb{C}) = \deg p$$

Beweis (9.66) Wir bestimmen ein hinreichend großes $R > 0$ so dass $|p(z)| \geq 1$ für $|z| \geq R$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} \frac{p'(\zeta)}{p(\zeta)} d\zeta = N(f, \operatorname{Int} c) = N(f, \mathbb{C})$$

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z}\left(\frac{n + O_1(\frac{1}{z})}{1 + O_2(\frac{1}{z})}\right)$$

$$|O_2(\frac{1}{z})| \leq \frac{1}{2} \qquad |z| \geq \frac{R}{2}$$

$$= \frac{1}{z}(n + O_1(\frac{1}{z}))(1 + O_3(\frac{1}{z}))$$

$$= \frac{1}{z}(n + O_4(\frac{1}{z})) = \frac{n}{z} + \underbrace{\frac{1}{z}O_4(\frac{1}{z})}_{\sum_{j\geq 2} b_j z^{-j} \quad \text{besitzt eine Stammfunktion}}$$

67 **Definition: „biholomorph“**

Es sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und $f\colon G \mapsto G' := f(G)$ sei bijektiv mit $f^{-1} \in \mathcal{O}(G')$. Dann heißt f biholomorph.

68 **Bemerkung: Anmerkung**

Dann gilt: $f(f^{-1}(w)) = w$ also $id = f'(f^{-1}(w))(f^{-1})'(w)$ .. ..

69 **Korollar: Folgerung**

Es sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und biholomorph. Ferner sei $z_0 \in G, \overline{B_{\varepsilon_0}(z_0)} \subset G$. Dann gilt für $w \in f(B_{\varepsilon_0}(z_0))$:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\varepsilon_0}(z_0)} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta =: I(w)$$

Beweis (9.69) Nach dem obigen Satz ist

$$I(w) = \sum_{z \in \operatorname{Int} c \cap f^{-1}(w)} \operatorname{ind}_c(z) v(f, z) z = f^{-1}(w)$$

70 **Satz: Satz von Rouché**

Es seien $f, g \in \mathcal{O}(G)$ und c ein nullhomologer und einfach geschlossener Weg in G und es gelte

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| < |g(\zeta)| \qquad \zeta \in \operatorname{im} c$$

Dann gilt

$$N(g, \operatorname{Int} c) = N(f, \operatorname{Int} c)$$

Beweis (9.70)

$$h_t(z) := g(z) + t(f(z) - g(z)), \quad z \in G$$
$$\Rightarrow h_z \in \mathcal{O}(G) \quad \forall t$$
$$h_0 = g \qquad h_1 = f$$

Dann gilt für $\zeta \in \operatorname{im} c$

$$|h_t(\zeta)| \geq |g(\zeta)| - |f(\zeta) - g(\zeta)| > 0$$
$$\Rightarrow N(h_t, \operatorname{Int} c) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{h_t'(\zeta)}{h_t(\zeta)} d\zeta = I(t)$$

Jedoch ist I stetig also konstant. Insbesondere ist $N(f, \operatorname{Int} c) = N(g, \operatorname{Int} c)$ $\square$

Beweis (Fundamentalsatz der Algebra) Wir setzen $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots$ und $g(z) = z^n$. Wir wissen $N(g, \mathbb{C}) = n$ und für $|z| = R >> 0$ folgt dann mit dem Satz von Roche $N(f, \mathbb{C}) = N(g, \mathbb{C})$.

Anmerkung Im Satz von Roche lässt sich die geforderte Ungleichung sogar durch folgende ersetzen:

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| < |g(\zeta)| + |f(\zeta)|$$

71 **Korollar: Folgerung**

Sei $G \supset \overline{B_1(0)}$, $h \in \mathcal{O}(G)$ und $h(\partial B_1(0)) \subset B_1(0)$. Dann besitzt h in $B_1(0)$ genau einen Fixpunkt.

Beweis (9.71) Sei $g(z) = -z$, $f(z) = h(z) - z$, dann gilt für $\zeta \in \partial B_1(0)$

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| = |h(\zeta)| < |g(\zeta)| = 1$$

72 **Satz: Fixpunktsatz von Brouwer**

Ist $\overline{B_1^m} \mapsto \overline{B_1^m}$ stetig, dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt.

9.8 Übersicht

G Gebiet $\subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}(G)/\mathcal{M}(G)$.

Weierstrass
- Potenz-/Laurent Reihen
- Rechenregeln
- Konvergenzsätze
- (kompakte Konvergenz, lokale Beschränktheit)
- Nutzung: explizite Reihendarstellungen, z.B. $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{j\geq 0} \frac{B_j}{j!} z^j$

Riemann
- Komplexe Differenzierbarkeit
- Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen
- Rechenregeln, Biholomorphie
- Nutzung: komplexe Kurven; komplexe Differentialgleichungen

Cauchy
- Satz von Morera
- Integralsatz/-formel für Kreisscheiben und nullhomologe Wege
- Residuensatz
- Nutzung: z.B. Gamma Funktion

9.8.1 Ausblick

Die Funktionentheorie ist noch nicht erschöpft. Beispiele:

1. Wir wissen, dass e^z, $z \in \mathbb{C}$ jeden Wert in $\mathbb{C}^*$ unendlich oft annimmt. Ist das eine Eigenschaft von $\mathcal{O}(\mathbb{C})$? Für Polynome gilt dies nicht (sie nehmen jeden Wert genau deg mal an). Alle anderen Funktionen $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}[z]$, die ganzen transzendenten Funktionen nehmen nach dem Satz von Picard jeden Wert von $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.

2. Wie verallgemeinert sich die Produktdarstellung

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right)$$

   Die Antwort gibt der Produktsatz von Hadamard.

3. Komplexe Mannigfaltigkeiten

   der Dimension 1 =: Komplexe Kurve (reelle Flächen)

   Motivation: Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$.

   Dabei ist S^2 homöomorph zu $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Mit den Karten $\varphi_0 = id$ und $\varphi_1 : z \mapsto \frac{1}{z} \in B_R(0)$, $\infty \mapsto 0$.

   Ist nun $f : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \mathbb{C}$ gegeben, so heißt sie holomorph bzw. meromorph, wenn $f \circ \varphi_0^{-1}$ und $f \circ \varphi_1^{-1}$ diese Eigenschaft besitzen.

73 **Definition: „Riemannsche Zahlenkugel“**

$\overline{\mathbb{C}}$ heißt die Riemannsche Zahlenkugel. Sie trägt eine komplexe Struktur durch $\mathcal{O}/\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) = \left\{ f : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \mathbb{C} : f \circ \varphi_0^{-1} \in \mathcal{O}/\mathcal{M}(B_R(0)), f \circ \varphi_1^{-1} \in \mathcal{O}/\mathcal{M}(B_R(0)) \right\}$

74 **Satz:**

Über $\overline{\mathbb{C}}$ sind die meromorphen Funktionen gerade die rationalen Funktionen und für eine meromorphe Funktion verschwindet die Summe ihrer Residuen.

9.9 komplexe Differentialgleichungen

Frage

1. Gibt es eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $y(z)$ mit

$$y'(z) = ay(z) \quad a \in \mathbb{C}$$

Fixiere $z_0 \in \mathbb{C}$. Man nehme an, y ist holomorph in $B_\varepsilon(z_0)$, $\varepsilon > 0$, $y(z) \neq 0$ für $z \in B_\varepsilon(z_0)$, dann ist dort auch $y'(z) \neq 0$ und es gilt

$$
\begin{aligned}
&& \frac{y'(z)}{y(z)} &= a \\
\Leftrightarrow && (\log y(z))' &= a \\
\Leftrightarrow && \log y(z) &= a(z - z_0) + b \\
\Leftrightarrow && y(z) &= e^{a(z-z_0)}e^b = Ce^{a(z-z_0)} = y(z_0)e^{a(z-z_0)}
\end{aligned}
$$

2. Ist nun $y'(z) = a(z)y(z)$, $a \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $z_0 = 0$, $y(z) \neq 0$ in $B_\varepsilon(0)$, $\log(y) \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(0))$.

$$\Rightarrow (\log y)'(z) = a(z) = \sum_{j\geq 0} a_j z^j$$

$$\Rightarrow \log y(z) = \sum_{j\geq 0} \frac{a_j}{j+1} z^{j+1} + b$$

$$\Rightarrow y(z) = \tilde{b}e^{A(z)} = y(0)e^{A(z)}$$

3. Sei $a \in \mathbb{C}$, gesucht ist $y \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit

$$y''(z) + ay(z) = 0$$

Setze $v(z) := y'(z)$ und $w(z) := y(z)$, dann ist $v'(z) = -ay(z) = -aw(z)$ oder

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}'(z) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}(z) =: A \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(z)$$

$$t'(z) = At(z) \; t(z) = e^{Az}t(z_0)$$

Wir setzen dazu

$$e^{Az} = \sum_{j\geq 0} \frac{A^j z^j}{j!}$$

$$\frac{d}{dz}e^{Az}t(0) = \frac{d}{dz}\sum_{j\geq 0} \frac{z^j}{j!}A^j t(0) = \sum_{j\geq 1} \frac{z^{j-1}}{(j-1)!}A^j t(0)$$

$$= A\sum_{j\geq 0} \frac{z^j}{j!}A^j t(0) = A\left(e^{Az}t(0)\right)$$

4. Wie sieht es aus bei

$$z^2y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \mu^2)y(z) = 0 \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung ν?

Man verwendet einen Potenzreihenansatz:

$$y(z) =: \sum_{j\geq 0} y_j z^j$$

Einsetzen ergibt Rekursionsformeln, die sich lösen lassen.

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen

10.1 Vorbereitungen: Der Systembegriff

Wir haben eine Menge X = Phasenraum oder Zustandsraum des betrachteten „Systems“, das heißt die Punkte $x \in X$ sind die möglichen Zustände des Systems.
V.I.Arnold: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Ein Problem Man habe zwei Städte (A und B), die durch zwei Straßen (I und II) verbunden sind. Es ist bekannt: Zwei Autos können von A nach B fahren auf I bzw. II verbunden ein Kabel der Länge $2l$, ohne dass das Kabel reißt.

Nun sollen zwei Gastanks mit Radius l von A nach B und gleichzeitig von B nach A transportiert werden. Geht das?

Lösung Wir betrachten den Zustandsraum der Positionen von zwei Fahrzeugen $X = [0,1] \times [0,1] \ni (x_1, x_2)$.

Jede Fahrt von 2 Fahrzeugen ist eine stetige Funktion $x(t) = (x_1(t), x_2(t))_{t\in[0,1]}$

Bei der Fahrt zweier verbundener Autos (Fahrt 1) ist $x(0) = (0,0)$, $x(1) = (1,1)$. Bei dem Transport der Tanks (Fahrt 2) ist $x'(0) = (0,1)$, $x'(1) = (1,0)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 = (x_{10}, x_{20}) = x(t_1) = x'(t_2)$. Wenn die beiden Wege durch c_1 und c_2 beschrieben werden, so muss gelten: $|c_1(t_1) - c_2(t_2)| \leq 2l$. Dort passen die Tanks also nicht aneinander vorbei.

Das Wachstum der Bakterien Der Zustand der Bakterienkultur ist die von ihr bedeckte Fläche F und es $F(t+1) = aF(t)$.

Das Wachstum der Bevölkerung $p(t)$ ist die Anzahl der lebenden Individuen

$$p(t+1) = p(t) + \text{Geburtenrate}(t)p(t) - \text{Sterberate}(t)p(t) - bp(t)^2$$
$$\Rightarrow p'(t) = rp(t) - bp(t)^2$$

So erhält man durch Idealisierung das logistische Wachstum.

Absicht Wir wollen die zeitliche Entwicklung des Systems bestimmen und voraussagen.

Annahme Es gibt eine permanente Zustandsveränderung.

$$X \xrightarrow{\phi_t} X, x \mapsto \phi_t(x)$$

Forderungen
1. $\phi_0 = Id_X$ (Fixierung des Zeitpunktes)
2. ϕ_t ist bijektiv (Determinismus)
3. $\phi_{t_1+t_2}(x) = \phi_{t_1}(\phi_{t_2}(x))$ (auch Determinismus)

Das heißt die <u>Zustandsentwicklung</u> $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine 1-parametrige Familie von Bijektionen.

1 **Definition: „dynamisches System“**
Ein Paar $(X, \phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ heißt ein dynamisches System (kontinuierlich), wenn X eine Menge und $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ eine 1-parametrige Familie von Bijektionen ist. Dann heißt $(\phi_t(x))_{t\in\mathbb{R}}$ der Orbit oder die Trajektorie von X in diesem System.

Wir schränken dies sofort ein auf

- X ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$
- ϕ_t ist eine Familie von Diffeomorphismen $t \mapsto \phi_t(x)$ ist ein C^∞-Weg in X.

Zunächst wird es genügen, $X = \mathbb{R}^m$ zu betrachten.

2 **Definition: „erweiterter Phasenraum“**
Die Menge $\mathbb{R} \times X$ heißt der erweiterte Phasenraum des Systems, das heißt er enthält die Graphen der Orbits.

10.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen und Vektorfelder

Es sei $M := \mathbb{R}^m$, und der C^∞-Weg $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \ni t \mapsto \phi_t(x) \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) =: X(\phi(t))$$
$$\phi_t(x) \mapsto X(\phi_t(x))$$

Jede Familie von C^∞-Wegen wie oben erzeugt ein C^∞-Vektorfeld im $\mathbb{R}^m$.

Frage Können wir aus einem Vektorfeld wieder ein dynamisches System gewinnen?
Dazu brauchen wir einen C^∞-Weg

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi_t(x_0) \quad \text{mit} \quad \phi_0(x_0) = x_0 \qquad \frac{d}{dt}\phi_t(x_0) = X(\phi_t(x_0))$$

Wir setzen $c_{x_0}(t) := \phi_t(x_0)$ und haben dann die Bedingungen $c_{x_0}(0) = x_0$ und $c'_{x_0}(t) = X(c_{x_0}(t))$.

3 **Definition: „Anfangswertproblem“**
Diese Bedingungen heißen das Anfangswertproblem der durch X definierten gewöhnlichen Differentialgleichung.

Beispiel Ein C^∞-Vektorfeld ist $X(x) = a(x) \underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{Basis für } \mathbb{R}}$. Also haben wir zu lösen

$$c_{x_0}(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$
$$c'_{x_0}(t) = a(c_{x_0}(t))$$

1. Fall: $c_{x_0}(0) = x_0$, $a(x_0) = 0$
   $\Rightarrow c_{x_0}(t) = x_0$ ist die Lösung
   weil $0 = c'_{x_0}(t) = a(c_{x_0}(t)) = a(x_0)$
2. Fall: $a(x_0) \neq 0$
   Physikerlösung:

$$c_{x_0}(t) = F_{x_0}^{-1}(t)$$
$$\frac{dc_{x_0}(t)}{a(\underbrace{c_{x_0}(t)}_{y})} \int_0^t dt = \int_{x_0}^{c_{x_0}(t)} \frac{dy}{a(y)} = F_{x_0}(c_{x_0}(t))$$

4 **Satz: Satz 10.4**

In einer Umgebung von $t = 0$ ist die Lösung des durch X definierten Anfangswertproblems gegeben durch

$$c_{x_0}(t) = F_{x_0}^{-1}(t)$$

wobei

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{a(y)}$$

für $a(x_0) \neq 0$ und $c_{x_0}(t) = x_0$ für $a(x_0) = 0$.

10.3 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei $U \subset eq\mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$ und $A\colon U \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(*) \begin{cases} \frac{d}{dt} c_{x_0}(t) = A(c_{x_0}(t)) \\ c_{x_0}(0) = x_0 \end{cases}$$

Wir schreiben im Folgenden für c_{x_0} nur c.

Frage Existiert zu A und $x_0 \in U$ immer eine Lösung? Ist diese Lösung eindeutig?

Antwort Ja, unter bestimmten Voraussetzungen

5 **Satz: Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf**

Sei $U \subset eq\mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$ so gewählt dass $\overline{B} := \overline{B_r(x_0)} \subset eqU$ gilt. Weiterhin sei $A\colon U \to \mathbb{R}^m$ ein stetiges Vektorfeld, dass auf $\overline{B}$ einer Lipschitzbedingung genügt.

$$\exists L > 0\colon \forall x, y \in \overline{B}\colon |A(x) - A(y)| \leq L|x - y| \tag{5.1}$$

Dann existiert ein Intervall $I = [-a, a]$ mit $a = a(x_0, A) > 0$ und genau eine Funktion $c\colon I \to U$, die das Anfangswertproblem $(*)$ löst.

Beweis (10.5)

1. Das Anfangswertproblem $(*)$ ist äquivalent zu einer Integralgleichung. Genauer

$$c\colon I \to U, c \in C^1 \text{und löst}(*) \tag{10-1}$$

$$\Leftrightarrow c\colon I \to U \text{ist stetig und } c \text{ erfüllt} c(t) = x_0 + \int_0^t A(c(s))ds =: (Tc)(t) \forall t \in I \tag{10-2}$$

Beweis für „⇒“ Aus $(*)$ folgt durch Integration (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$$\begin{aligned} c(t) &= c(0) + \int_0^t c'(s)ds \\ &= x_0 + \int_0^t A(c(s))ds \end{aligned}$$

und c ist stetig.

Beweis für „⇐“ Da der Integrand $A \circ c$ stetig ist, ist $Tc \in C^1$. Ferner gilt $(Tc)'(t) = A(c(t))$. Wegen $c(0) = x_0$ erfüllt c also das Anfangswertproblem $(*)$.

2. Ist $a > 0$ hinreichend klein, so ist die Integralgleichung äquivalent zu einer Fixpunktgleichung, das heißt $10-2 \Leftrightarrow T\colon M \to M, c \mapsto Tc$ hat einen Fixpunkt $c_* \in M$ $(Tc_* = c_*)$. Hierbei ist $M := \left\{c \in C(I, \mathbb{R}^m) | \|c - x_0\|_\infty \le r\right\}$ für ein $r > 0$. Dabei muss gezeigt werden
   a) $(Tc)(t)$ ist sinnvoll definiert, also $c(t) \in U \forall t \in I$ damit $A(c(s))$ erklärt ist.
   b) Tc ist stetig und $\|Tc - x_0\|_\infty \le r$ also $Tc \in M$.

   Die Fixpunktgleichung folgt dann sofort aus der Formel für $10-2$.

   Beweis

$$|c(t) - x_0| \le \|c - x_0\|_\infty \le r \wedge \overline{B} = \overline{B_r(x_0)} \subset eqU \subset eq\mathbb{R}^m$$

   Also gilt (a).

   Weiter ist $Tc \in C^1$, also insbesondere stetig.

$$\|Tc - x_0\|_\infty = \max_{t\in I} |\int_0^t A(c(s))ds| \le \max_{t\in I} |\int_0^t |A(c(s))|ds| \le \max_{y\in\overline{B}} A(y) \cdot \max_{t\in I} |\int_0^t ds| = A_\infty \cdot a$$

   Wähle also $0 < a \le \frac{r}{A_\infty}$. Dann gilt $\|Tc - x_0\|_\infty \le r$. Somit gilt auch (b).

3. Wir wenden schließlich den Fixpunktsatz von Banach an. In unserer Situation lautet die Formulierung:

Banachscher Fixpunktsatz in dieser Situation Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T: M \to M$ eine kontrahierende Abbildung, das heißt

$$\exists \lambda \in (0,1) \forall c_1, c_2 \in M: d(Tc_1, Tc_2) \leq \lambda d(c_1, c_2)$$

Dann konvergiert die Iterationsfolge $T^n c_0$ für jeden Startwert $c_0 \in M$ gegen einen Fixpunkt $c_* \in M$ (also $Tc_* = c_*$. Ferner ist der Fixpunkt eindeutig und es gilt

$$d(c_n, c_*) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(c_0, Tc_0)$$

M wie oben ist ein abgeschlossener Ball im Banach-Raum $C(I, \mathbb{R}^m)$ mit Maximumsnorm, also ist M selber vollständig als metrischer Raum mit Metrik $d(c_1, c_2) = \|c_1 - c_2\|_\infty$. Die Kontraktivität der Abbildung ist noch zu zeigen.

$$\begin{aligned}\|Tc_1 - Tc_2\|_\infty &= \max_{t \in I} \left| \int_0^t (A(c_1(s)) - A(c_2(s))) ds \right| \leq \max_{t \in I} \left| \int_0^t |A(c_1(s)) - A(c_2(s))| ds \right| \\ &\leq \max_{t \in I} \int_0^t L \|c_1(s) - c_2(s)\| ds \leq \|c_1 - c_2\|_\infty \cdot \underbrace{\max_{t \in I} \left| \int_0^t L ds \right|}_{=La}\end{aligned}$$

Für $0 < a \leq \frac{1}{L}$ ist $\lambda < 1$, also T kontrahierend. □

Bemerkungen

1. Der Fixpunktsatz liefert ein konstruktives Verfahren zum Finden der Lösung: Starte mit der konstanten Funktion $c_0(t) = x_0$. $c_1(t) = (Tc_0)(t) = x_0 + \int_0^t A(x_0) ds = x_0 + tA(x_0)$.

   $$\|c_0 - Tc_0\|_\infty = \max_{t \in I} |tA(x_0)| = a|A(x_0)|$$

   Der Fehler der n-ten Iterierten $c_n := T^n c_0$ ist somit

   $$|c_n(t) - c_*(t)| \leq \|c_n - c_*\| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(c_0, Tc_0) \leq \frac{(aL)^n}{1-aL} a \|A(x_0)\|$$

   Beispiel $Ax = x, U = \mathbb{R}^m, x(0) = 0$. Dann erhält man $c_*(t) = x_0(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots) = e^t x_0$ durch Iteration.

2. Auf die Einschränkung $0 < a \leq \frac{1}{h}$ des Existenzintervalls $I = [-a, a]$ kann verzichtet werden, durch eine gewichtete Maximumsnorm. Die andere Bedingung $0 < a \leq \frac{r}{A_\infty}$ ist in jedem Fall nötig.

6 **Definition: „Integralkurve"**

Ein C^∞-Weg $c\colon (a,b) \to M$ mit $-\infty \le a < 0 < b \le \infty$ heißt Integralkurve des Vektorfelds $X \in \tau(M)$ durch $c(0) = \phi \in M$, wenn gilt $c'(t) = dc(t)\left[\frac{d}{dt}\right] = X(c(t))$ und $c(0) = \phi$.

In lokalen Koordinaten $x1, \dots, x_m \in U_p$ gilt

$$c(t) = \left(c_1(t), \dots, c_m(t)\right), \quad c_i = x_i \circ c$$
$$X(q) = \sum_{i=1}^m X_i(q) \frac{\partial}{\partial x}\Big|_q, \quad q \in U_p, \quad X_i \in C^\infty(U_p)$$

Dann erhält das Anfangswertproblem die Form

$$c'(t) = \left(c_1'(t), \dots, c_m'(t)\right) \in T_{c(t)}M = \sum_{i=1}^m c_i'(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{c(t)} = \sum_{i=1}^m X_i(c(t))\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{c(t)}$$
$$\Leftrightarrow c_i'(t) = X_i(c(t)) \quad c_i(0) = x_i(p) =: x_{i0}$$

7 **Definition: „Lösung des Anfangswertproblems"**

$c(t)$ heißt Lösung des Anfangswertproblems

$$c'(t) = X(c(t)), \quad X \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$
$$c(0) = x_0$$

in (a,b).

Warnung Integralkurven haben eine eindeutig bestimmte Parametrisierung.

Frage Wie verhalten sich die Integralkurven im Großen?

Beispiel $m = 1$, $X(x) := 1 + x^2$

Zur Integration benutzen wir Satz 10.4 für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{1+y^2} = \int_{t_0}^t ds \quad \text{mit} \quad x(t_0) = x_0$$
$$\Rightarrow \arctan x(t) = t - t_0 + \arctan x_0 =: t - \alpha$$
$$\Rightarrow x(t) = \tan(t-\alpha) \qquad |t-\alpha| < \frac{\pi}{2}$$

Beispiel 2 $x'(t) = \operatorname{sgn} x(t)\sqrt{|x(t)|}$

Also ist mit $x(t)$ auch $x(-t)$ eine Lösung!

Es ist zu beachten, dass $F(x) = \operatorname{sgn} x\sqrt{|x|}$ in $x = 0$ weder differenzierbar noch Lipschitz-stetig. (lediglich Hölder-stetig mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$, das heißt $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^{\frac{1}{2}}$)

Betrachte zunächst $x_0 > 0$ also auch $x > 0$. Dort haben wir

$$2\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_{t_0}^{t} ds = t - t_0$$
$$= 2(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) \Leftrightarrow \sqrt{x(t)} = \sqrt{x_0} + \frac{t-t_0}{2}$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{t-t_0}{2}\right)^2 \Rightarrow x(t_0) = x_0$$

Nun gibt es unendlich viele Lösungen durch $x_0 = 0$, obwohl F stetig ist! (Sie sind zuerst konstant und folgen dann einer Parabel nach oben oder unten)

8 **Lemma: Hilfssatz**

Sei c eine Integralkurve von X durch p, definiert in (a, b) und $t_1 \in (a, b)$. Dann ist $t \mapsto c(t_1+t) \in M$ eine Integralkurve von X durch $c(t_1)$ definiert für $a < t_1 + t < b \Leftrightarrow a - t_1 < t < b - t_1$.

9 **Satz:**

Zu jedem $p \in M$ existiert eine maximale Integralkurve

$$c_p\colon (a_p, b_p) \to M, \quad -\infty \le a_p < 0 < b_p \le \infty$$

derart, dass für jede Integralkurve $c\colon (a, b) \to M$ gilt $a_p \le a$, $b \le b_p$ und $c = c_p|(a, b)$.

Beweis (10.9) Wir müssen eine Halbordnung auf der Menge (c_I, I) mit einer Integralkurve c_I durch p auf $I = (a, b)$ finden. Es sei

$$(c_I, I) < (c_{\overline{I}}, \overline{I}) \Leftrightarrow I \subset \overline{I}$$

Hier ist $c_{\overline{I}}|I = c_I$ wegen Eindeutigkeit. Sei $(c_I, I)_{I\in J}$ eine Kette in der Menge der Integralkurven. Dann ist (c_{I_∞}, I_∞) eine obere Schranke, wenn wir setzen

$$I_\infty\colon = \bigcup_{I\in J} I = (a_p, b_p), \quad -\infty \le a_p < 0 < b_p \le \infty$$
$$t \in I_\infty\colon c_\infty(t) = c_I(t), \quad t \in I$$

10 **Definition: „Vollständigkeit“**

$X \in \tau(M)$ heißt vollständig, wenn $a_p = -\infty$, $b_p = \infty$ für alle $p \in M$.

Bemerkung Nicht alle Vektorfelder sind vollständig!

11 **Lemma: Hilfssatz**

Wenn M kompakt ist, dann ist jedes Vektorfeld vollständig.

Bemerkung Für kompakte Mannigfaltigkeiten sind Vektorfelder restringiert. Zum Beispiel gibt es auf S^2 kein Vektorfeld X mit $X(p) \neq 0 \forall p \in S^2$, wohl aber auf S^{2n+1}. Eine interessante Frage ist: wieviele linear unabhängige Vektorfelder $\neq 0$ gibt es denn dann?

12 **Definition: „ “**

Für ein Vektorfeld $X \in \tau(M)$ definieren wir für $t \in \mathbb{R}$

$$D_t \colon \left\{ p \in M \colon t \in (a_p, b_p) \right\}$$
$$\phi_t(p) \colon = c_p(t)$$

13 **Satz: Hauptsatz über Integralkurven**

Sei $X \in \tau(M)$

1. Zu $p \in M$ gibt es $\varepsilon = \varepsilon_p > 0$ und eine offene Umgebung U_p so, dass die Abbildung

   $$(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p \ni (t, q) \mapsto c_q(t) \in M$$

   wohldefiniert und C^∞.
2. D_t ist offen und $\phi_t \colon D_t \to M$ ist ein Diffeomorphismus (auf sein Bild).
3. $\operatorname{dom} \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} \colon = \left\{ p \in D_{t_2} \colon \phi_{t_2} \in D_{t_1} \right\} \subset D_{t_1 + t_2}$

   Im Allgemeinen gilt hier nicht Gleichheit, wohl aber, wenn $t_1 t_2 > 0$.

Bemerkung Wenn X vollständig ist, so gilt $D_t = M$ für alle t, ϕ_t ist ein Diffeomorphismus von M und $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1 + t_2}$

14 **Definition: „Fluss“**

Die Familie $(\phi_t \colon D_t \to M)_{t \in \mathbb{R}}$ heißt der (lokale) Fluss des Vektorfelds X.

Allgemeinere Differentialgleichung

$$\sigma'(t) = F(t, \sigma(t)) \qquad t \in I \subset I_0$$
$$\sigma(t_0) = x_0$$
$$F \in C(I \times U), \quad I_0 = (a, b) \ni t_0$$
$$x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$$

σ heißt globale Lösung wenn $I = I_0$.

Reduktion auf den autonomen Fall $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$.

Wir führen ein neues Problem ein:

$$\tilde{\sigma}(t) = (t, \sigma(t)) \in \tilde{U} = I \times U$$
$$\tilde{\sigma}'(t) = (1, \sigma'(t)) = (1, F(t, \sigma(t))) = (1, F(\widetilde{\sigma(t)})) = \tilde{F}(\tilde{\sigma}(t))$$

Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit aus dem Ergebnis im autonomen Fall.

$$C^{l,k}(I\times U) := \left\{f\colon I\times U\to\mathbb{R}^n\colon f(\cdot,x)\in C^l(I), f(t,\cdot)\in C^k(U)\right\}\supset C^{l+k}(I\times U)$$

$$C^{0,1-}(I\times U) := \left\{f\in C(I\times U)\colon \right.$$
$$\left. f(t,\cdot)\text{Lipschitz mit lokal gleichmäßiger Konstante in } t \text{ und } x\right\}$$

Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$\sigma^{(n)}(t) = F(t,\sigma(t),\sigma'(t),\dots,\sigma^{(n-1)}(t))$$
$$t\in I, \sigma\colon I\to\mathbb{R}^m$$
$$F\in C\left(I\times(\mathbb{R}^m)^{n-1}\right)$$

Wir führen ein

$$\tilde\sigma(t) := \begin{pmatrix}\sigma(t)\\ \sigma'(t)\\ \dots\\ \sigma^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$$

dann ist

$$\tilde\sigma'(t) = \begin{pmatrix}\sigma'(t)\\ \sigma''(t)\\ \cdots\ \tilde F(t,\tilde\sigma(t))\end{pmatrix} = \tilde F(t,\tilde\sigma(s)$$
$$\tilde\sigma(t_0) = \tilde{x_0}\in(\mathbb{R}^m)^{n-1}$$

10.4 Differentialgleichungen erster Ordnung

15 **Lemma: Ungleichung von Grönwall**
Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0\in I$, $\alpha,\beta,\gamma\in C(I,\mathbb{R}_+)$, so dass

$$0\le\sigma(t)\le\alpha(t)+|\int_{t_0}^t\beta(s)\sigma(s)ds|$$

Dann folgt

$$\sigma(t)\le\alpha(t)+|\int_{t_0}^t\alpha(s)\beta(s)e^{|\int_s^t\beta(x)du|}ds|$$

Beweis (10.15) Wir setzen

$$\tilde{\sigma(t)} := \int_{t_0}^{t} \beta(s)\sigma(s)ds \Rightarrow \tilde{\sigma}(t_0) = 0$$

$$\gamma(t) := e^{-|\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds|} = e^{-\operatorname{sgn}(t-t_0)\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \tilde{\sigma}'(t) = \beta(t)\sigma(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)|\int_{t_0}^{t} \beta(s)\sigma(s)ds| = \alpha\beta(t) + \beta(t)|\tilde{\sigma}(t)|$$

$$\Rightarrow 0 \leq \gamma(t)\tilde{\sigma}'(t) \leq \alpha\beta\gamma(t) + \beta(t)e^{-\operatorname{sgn}(t-t_0)\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds} \operatorname{sgn}(t-t_0) \int_{t_0}^{t} \beta(s)\sigma(s)ds$$

$$= \alpha\beta\gamma(t) - \gamma'(t)\tilde{\sigma}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\gamma(t)\tilde{\sigma}'(t)\right) - \alpha\beta\gamma(t) \leq 0$$

$$\Rightarrow \gamma(t)\tilde{\sigma}(t) \leq \int_{t_0}^{t} \alpha\beta\gamma(s)ds$$

16 **Satz:**

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \supset \mathbb{R}^m$ offen, $F \in C^{0,1-}(I \times U, \mathbb{R}^m)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\sigma'(t) = F(t, \sigma(t)), \quad \sigma(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in I \times U$$

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung

$$\sigma_{(t_0,x_0)} : (a_{t_0,x_0}, b_{t_0,x_0}) \to \mathbb{R}^m$$

wobei

$$\lim_{t \to b_{t_0,x_0}-0} \min d(\sigma_{t_0,x_0}(t), \partial u), |\sigma(t)|^{-1} = 0$$

und analog für a_{t_0,x_0}.

Beweis (10.16) Im wesentlichen wie beim Hauptsatz für Integralkurven.

Was ist denn im allgemeineren Fall $F \in C(I \times U)$. Wir wissen, dass Eindeutigkeit nicht mehr gegeben ist (Beispiel $y' = \sqrt{|y|}$). Gilt Existenz?

17 **Satz:**

Es sei $F \in C(I \times U)$, $(t_0, x_0) \in I \times U$ und $a, b > 0$ so, dass $M_{t_0,x_0} := \left[t_0 - a, t_0 + a\right] \times \overline{B_b(x_0)} \subset I \times U$. Gilt dann

$$\sup_{M_{t_0,x_0}} |F(t,x)| =: M$$

und ist $\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, so besitzt das Anfangswertproblem eine Lösung in $\left[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha\right]$.

Beweis (10.17) Grundidee: konstruiere approximierende Lösungen $\sigma_n\colon \left[t_0-\alpha, t_0+\alpha\right] \to \mathbb{R}^m$ mit $\sigma_n(t_0) = x_0$ und $|\sigma_n'(t) - F(t, \sigma_n(t))| \leq \frac{1}{n}$ für $t \in \left[z_{j-1}, z_j\right]$ wobei $\left[t_0-\alpha, t_0+\alpha\right] = \bigcup_{j=1}^{N} \left[z_{j-1}, z_j\right]$ für eine Zerlegung. (σ_n) werden Konstruiert (nach Euler) induktiv durch $\sigma_n(t) = \sigma(z_{j-1}) + (t - z_{j-1})F(z_{j-1}, t_n(z_{j-1}))$, $t \in (z_{j-1}, z_j)$. σ_n ist bei geeigneter Wahl der z_j eine approximierende Folge. Wenn (σ_n) eine in $C(\left[t_0-\alpha, t_0+\alpha\right], \overline{B_b(x_0)})$ konvergente Teilfolge besitzt, dann konvergiert sie gegen eine Lösung des Anfangswertproblems. Die Folge (σ_n) ist in $\left[t_0-\alpha, t_0+\alpha\right] \times \overline{B_b(x_0)}$ gleichgradig stetig $\Rightarrow$ Arzela-Ascoli ist anwendbar.

Bemerkung (10.16) stammt von Picard & Lindelöf (führte zum Fixpunktsatz)
(10.17) stammt von G. Peano, ähnlich bei Cauchy

Bemerkung Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\sigma'(t) = A(t)\sigma(t) + b(t) = F(t, \gamma(t))$$
$$\Rightarrow |F(t, \sigma(t))| \leq \|A(t)\||\sigma(t)| + |b(t)| =: a(t)|\sigma(t)| + |b(t)|$$

18 **Satz:**
Die Lösung des Anfangswertproblems für $F\colon I \times U \to \mathbb{R}^m$ mit

$$|F(t, x)| \leq \beta(t)|\sigma(t)| + \alpha(t)$$

wo $\alpha, \beta \in C(I, \mathbb{R}_+)$, existiert für alle $t \in I$, das heißt das Anfangswertproblem ist global lösbar.

10.5 Lineare Differentialgleichungen

Eine Lineare Differentialgleichung ist von der Form

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$
$$x(t_0) = x_0$$
$$t \in I, x_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$$
$$A\colon I \ni t \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}^m), A \in C(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m))$$
$$b \in C(I, \mathbb{R}^m)$$

Nach Satz 10.18 ist das Anfangswertproblem lösbar in $I \times V$, wenn $\overline{I} \subset I, \overline{V} \subset V$ und beide beschränkt sind. Das Anfangswertproblem heißt homogen wenn $b \equiv 0$ andernfalls inhomogen.

19 **Lemma: Hilfssatz**
Es sei t_0 fest und das Anfangswertproblem in I global lösbar. Dann bezeichne $x(t, x_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(t_0, x_0) = x_0$. So bilden die Lösungen des homogenen Anfangswertproblems mit Anfangswert bei t_0 einen $\mathbb{R}$-Vektorraum und die Abbildungen

$$\mathbb{R}^m \ni x_0 \mapsto x(\cdot, x_0) \in A$$

ist ein linearer Isomorphismus.

Beweis (10.19) Wir betrachten die Lösungen $x(\cdot, x_0)$ und $x(\cdot, x_1)$ und bilden

$$y(t) := \lambda_0 x(t, x_0) + \lambda_1 x(t, x_1)$$

Dann gilt, wegen der Linearität von A:

$$y'(t) = \lambda_0 A(t)x(t, x_0) + \lambda_1 A(t)x(t, x_1) = A(t)y(t)$$
$$y(t_0) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1$$
$$\Rightarrow y(t) = x(t, \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1) = \lambda_0 x(t, x_0) + \lambda_1 x(t, x_1)$$

wegen der eindeutigen Lösbarkeit. Die Abbildung $x_0 \mapsto x(\cdot, x_0)$ ist also linear und surjektiv, sie ist aber auch injektiv, denn $x_0 = 0 \Rightarrow x(\cdot, 0) \equiv 0$ wegen der Eindeutigkeit.

Anmerkung Wir können immer $U = \mathbb{R}^m$ annehmen.
Wir können also m Lösungen $x_i = x(\cdot, x_{0i})$ finden, $x_{0i} \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig. Dann bilden wir die Matrix

$$X(t) = \left(x_1, \dots, x_m\right)(t) \qquad = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{m1}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1m}(t) & \cdots & x_{mm}(t) \end{pmatrix}$$

Also gilt

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = \left(x_{10}, \cdots, x_{0m}\right)$$

das heißt $X(t)$ löst die lineare Matrixgleichung.

20 **Definition: „Fundamentalmatrix“**
$X(t)$ heißt eine Fundamentalmatrix zum linearen Anfangswertproblem. Ist für ein t_0 $X(t_0) = I_{\mathbb{R}^m}$, so heißt $X = X_{t_0}$ eine Hauptfundamentalmatrix bei t_0.

Übung Ist X eine Fundamentalmatrix und X_{t_0} eine Hauptfundamentalmatrix, so gibt es $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $X(t) = X(t) = X_{t_0}C$ $(C = X(t_0))$.
Ist $X(t)$ eine Lösung des Matrixanfangswertproblems, so heißt $W(t) := \det X(t)$ die Wronski-Determinante von $X(t)$ bzw. des Lösungssystems $x_1(t), \cdots, x_m(t)$. Da $X(t) = X_{t_0}(t)X(t_0)$ folgt auch

$$W(t) = \det X_{t_0}(t) \det X(t_0)$$

Um die Wronski-Determinante auszurechnen, leiten wir ab:

$$\frac{d}{dt} \det(x_1(t), \cdots, x_m(t)) = \sum_{j=1}^{m} \det\,(x_1(t), \cdots, x_j'(t), \cdots, x_m(t))$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \det\,(x_1(t), \cdots, A(t)x_j(t), \cdots, x_m(t))$$

Ist $A \in \mathcal{L}(E)$ wobei E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension ist und $(e_j)_{j=1}^{\dim E}$ eine Basis, dann transformiert A vermöge

$$Ae_j = \sum_{k=1}^{\dim E} A_{jk} e_k$$

Dann ist die Spur unabhängig von der Wahl der Basis.

1. Fall $(x_1, \cdots, x_m)$ sind linear unabhängig

$\Leftrightarrow (x_{01}, \cdots, x_{0m})$ sind linear unabhängig

$\Leftrightarrow \det C \neq 0$. Dann folgt:

$$\frac{d}{dt} \det (x_1, \cdots, x_m)(t) = \sum_{j,k=1}^{m} \det (x_1(t), \cdots, A_{jk}(t) x_k(t), \cdots, x_m(t))$$

$$= \sum_{j=1}^{m} A_{jj}(t) \det (x_1(t), \cdots, x_m(t)) = \operatorname{Tr} A(t) W(t)$$

Also gilt

$$W'(t) = \operatorname{Tr} A(t) W(t) \qquad \Rightarrow W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s) ds}$$

2. Fall Ist $C = X(t_0)$ nicht invertierbar, so gilt $W(t_0) = 0 \Rightarrow W(t) = \det X_{t_0}(t) \det C = 0$

21 **Satz: Satz von Liouville**

Für jede Lösungsmatrix $X(t)$ gilt obige Formel.

22 **Lemma: Hilfssatz**

Ist y eine beliebige Lösung der inhomogenen Gleichung und x eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung, so ist $x + y$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

23 **Korollar:**

Das Anfangswertproblem der inhomogenen Gleichung wird gelöst durch

$$y(t, x_0) = y(t, 0) + x(t, x_0)$$

Wie finden wir eine Partikulärlösung?

Ansatz

$$y(t,0) = B(t)z(t), \quad z(0) = 0$$
$$\Rightarrow y'(t,0) = B'(t)z(t) + Bz'(t) = Ay(t,0) + b(t)$$
$$= A(t)B(t)z(t) + b(t)$$
$$\Rightarrow Bz'(t) = \left(AB(t) - B'(t)\right) z(t) + b(t)$$
$$z'(t) = B^{-1}(t)\left(AB(t) - B'(t)\right) z(t) + B^{-1}b(t)$$

Günstig wäre $AB(t) = B'(t)$. Dies definiert ein Fundamentalsystem und Hauptfundamentalsystem. Also sollten wir setzen

$$B(t) = X_{t_0}(t)$$

Dann wir

$$z'(t) = X_{t_0}(t)^{-1}b(t)$$
$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_{t_0}(s)^{-1}b(s)ds$$
$$y(t,0) = B(t)z(t,0) = X_{t_0}(t)\int_{t_0}^{t} X_{t_0}(s)^{-1}b(s)ds$$
$$= \int_{t_0}^{t} X_{t_0}(t)X_{t_0}(s)^{-1}b(s)ds$$

24 **Satz:**

Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ist gegeben durch die Lösungen $x(t,x_0)$ des homogenen Anfangswertproblems durch

$$y(t,x_0) = x(t,x_0) + \int_{t_0}^{t} X_{t_0}(t)X_{t_0}(s)^{-1}b(s)ds$$

Beweis (10.24) $X_{t_0}(t)$ ist invertierbar für alle t, also ist das Integral wohldefiniert. Ferner gilt

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} X_{t_0}(t)X_{t_0}(s)^{-1}b(s)ds = X_{t_0}(t)X_{t_0}(t)^{-1}bnt) + \int_{t_0}^{t} A(t)X_{t_0}(t)X_{t_0}(s)^{-1}b(s)ds$$
$$= b(t) + A(t)y(t,0) = y'(t,0)$$

25 **Korollar:**

Wir setzen

$$U(t,s) := X_{t_0}(t)X_{t_0}(s)^{-1}$$

Dann gilt

$$U(t,t) = I_{\mathbb{R}^m}, \qquad U(t,s_1)U(s_1,s_2) = U(t,s_2)$$

und $U(t,s) = X(t)X(s)^{-1}$ für jedes Fundamentalsystem des Anfangswertproblem.

Beweis (10.25) Ist X ein Fundamentalsystem, so gilt $X(t) = X_{t_0}(t)X(t)$, also

$$X(t)X(s)^{-1} = X_{t_0}(t)X(t_0)X(t_0)^{-1}X_{t_0}(s)^{-1} = X_{t_0}(t)X_{t_0}(s)^{-1} = U(t,s)$$

Ergänzung zu Näherungslösungen Betrachte das Anfangswertproblem $(*)$: $x'(t) = F(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ mit $F \in C(I, U)$ und $U \subset \mathbb{R}^m$ offen.

26 **Definition: „Näherungslösung"**

$\tau \in C(J, V)$, $J \Subset I$, $\overline{V} \subset U$, V offen heißt ε-Näherungslösung, falls es eine Zerlegung (t_i) von $\overline{J} =: [a, b]$ gibt, sodass

$$\|\tau'(t) - F(t, \tau(t))\| \leq \varepsilon$$

Bemerkung x ist eine ε-Näherungslösung für jedes $\varepsilon > 0$.

27 **Satz:**

Es seien τ_j ε_j-Näherungslösungen des Anfangswertproblems $(*)$ in $[a, b] \subset I$, $t_0 \in I$. Ferner sei F in x gleichmäßig Lipschitz-stetig, das heißt

$$\exists L \colon \forall t \in I, x_1, x_2 \in U \colon \|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

Dann gilt für $t \in I$

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|t - t_0|e^{L|t-t_0|}$$

Beweis (10.27) Für $t \in I$ sei oBdA $t > t_0$. Dann gibt es eine Zerlegung (t_i) von $\left[t_0, t\right]$ mit $\tau_j|(t_{i-1}, t_i) \in C^1(t_{i-1}, t_i)$, $\tau_j \in C\left[t_0, t_N\right]$. Dann gilt

$$\tau_1(t) - \tau_2(t) = \overbrace{\tau_1(t_0) - \tau_2(t_0)}^{=0} + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\tau_1'(s) - \tau_2'(s)\right) ds$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\left(\tau_1'(s) - F(s, \tau_1(s))\right) - \left(\tau_2'(s) - F(s, \tau_2(s))\right)\right) ds$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(F(s, \tau_1(s)) - F(s, \tau_2(s))\right) ds$$

$$\Rightarrow \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\| \leq \sum_{j=1}^{N} \left((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t_j - t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} L\|\tau_1(s) - \tau_2(s)\| ds \right)$$

$$\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|t - t_0| + L \int_{t_0}^{t} \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\| ds$$

$$\alpha(t) = \alpha_0(|t - t_0|) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|t - t_0| \qquad \beta(t) = L$$

$$\xrightarrow[\text{Grönwall}]{\sigma} (t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\sigma(s) ds$$

$$\Rightarrow \sigma(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s) e^{\int_s^t \beta(u) du} ds$$

dabei ist α_0 monoton wachsend

$$\Rightarrow \sigma(t) \leq \alpha(t) \left(1 + \int_{t_0}^{t} \beta(s) e^{\int_s^t \beta(u) du} \right)$$

$$= \alpha(t) \left(1 + \int_{t_0}^{t} -\frac{d}{ds} e^{\int_s^t \beta(u) du} ds \right)$$

$$= \alpha(t) e^{\int_{t_0}^t \beta(s) ds}$$

Wenn wir nur Stetigkeit haben, können wir eine Näherungslösung konstruieren durch das Eulersche Polygonzugverfahren.

Vorbemerkungen: Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t)$$

$$x_2(t) = x_1'(t) \qquad x_1(t) = x(t)$$

$$x_2'(t) = -a_1(t)x_2(t) - a_0(t)x_1(t) + b(t)$$

$$\tilde{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + b(t)$$

Um die Formel zur Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung benutzen zu können, müssen wir zuerst die Lösungen des homogenen Anfangswertproblems finden. Dabei sind die Spalten der Hauptfundamentalbasis eine Basis der Lösungen der homogenen Gleichung

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

Beispiele

1. Sei $A(t) \equiv A$ (Konstante Koeffizienten), dann ist

$$X_{t_0}(t) = e^{(t-t_0)A}$$
$$\Rightarrow x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds$$

2. Zur Lösung der homogenen Gleichung mit variablen Koeffizienten können wir wie folgt eine Approximation bei t_0 konstruieren. Es sei $\overline{x}$ eine Lösung des Anfangswertproblems $\overline{x}'(t) = A(t_0)\overline{x}(t)$, $\overline{x}(t_0) = x(t_0)$. Dann gilt

$$x'(t) - \overline{x}'(t) = (x - \overline{x})'(t) = A(t)x(t) - A(t_0)\overline{x}(t)$$
$$= A(t_0)\underbrace{(x - \overline{x})(t)}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{(A(t) - A(t_0))}_{b(t)}x(t)$$

Dann folgt

$$(x-\overline{x})(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A(t_0)}(A(s) - A(t_0))(x - \overline{x})(s)ds + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A(t_0)}(A(s) - A(t_0))\overline{x}(s)ds$$

28 **Satz: Prinzip von Duhamel**

Wir setzen induktiv

$$x^{(0)}(t) = e^{(t-t_0)A(t_0)}x_0 \qquad u^{(n+1)}(t) = x^{(n)}(t) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A(t_0)}(A(s) - A(t_0))x^{(n)}(s)ds$$

Dann gilt

$$\sup_{t\in\overline{J}} \|(x - x^{(n+1)})(t)\| \le \left(\int_{t_0}^{t} e^{(t-t_0)\|A(t_0)\|}\|A(s) - A(t_0)\|ds\right) \sup_{t\in\overline{J}} \|(x - x^{(n)})(t)\|$$

Anwendung Es sei $X \in C_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, so dass X vollständig ist. Dann ist der Fluss $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ eine Familie von C^1-Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^m$. Es sei nun U offen und beschränkt, gefragt wird nach der Änderung von

$$\int_{\varphi_t(U)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = V(t)$$

29 **Satz: Satz von Liouville**

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_{\varphi_t(U)} \operatorname{div} X(x)dx$$

Beweis (10.29) Wir haben

$$V(t) = \int_{\varphi_t(U)} \underbrace{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m}_{dvol_{\mathbb{R}^m}} = \int_U \varphi_t^*(dvol_{\mathbb{R}^m}) = \int_U \det(D_x\varphi_t(x))dx$$

$$V'(t) = \int_U \frac{\partial}{\partial t} \det(D_x\varphi_t(x))dx$$

$$= \int_U \det(D_x\varphi_t'(x))dx = \int_U \det(D_xX(\varphi_t(x)))dx$$

$$= \int_U \det(DX)(\varphi_t(x)) \circ D_x\varphi_t(x)dx$$

Das heißt mit $Y_t(x) := D_x\varphi_t(x)$ gilt

$$Y_t'(x) = DX(\varphi_t(x))Y_t(x)$$

$$\Rightarrow \det Y_t(x) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{Tr} DX(\varphi_t(x))} \det Y_0(x)$$

Also gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \det Y_t(x) = \operatorname{Tr} DX(\varphi_t(x)) \det Y_t(x)$$

$$\operatorname{Tr} DX(\varphi_t(x)) = \operatorname{Tr}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\varphi_t(x))\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial x_j}(\varphi_t(x)) = \operatorname{div} X \circ \varphi_t(x)$$

$$\Rightarrow V'(t) = \int_U \operatorname{div} X \circ \varphi_t(x) \det(D_x\varphi_t(x))dx$$

$$= \int_{\varphi_t(U)} \operatorname{div} X(x)dx$$

Anwendung: Hamilton-Vektorfelder Wir nehmen $\mathbb{R}^{m=2n} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \ni (q,p)$ und setzen

$$\omega = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j$$

Für $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ definieren wir ein Vektorfeld X_H - das zu H und ω gehörige Vektorfeld - durch

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \left(Y_j \frac{\partial}{\partial p_j} + Y_j \frac{\partial}{\partial q_j} \right)$$

$$\omega \left[X_H, Y \right] := dH\,[Y] = \sum_{j=1}^{n} \left(Y_j \frac{\partial H}{\partial p_j} + Y_j \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(X_{H,j} Y - X_{H,y} Y_j \right)$$

$$\Rightarrow X_{H,j} = \frac{\partial H}{\partial q_j} \wedge X_{H,j} = -\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\Rightarrow H = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} X_H = 0$$

10.6 Lineare autonome Differentialgleichungen

Quelle: H.Amann, III. 12

Wir betrachten $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $A \in L(E)$, E ein endlich-dimensionaler K-Banachraum und die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Wir sehen, dass das Vektorfeld $f\colon x \mapsto Ax$ glatt ist und erzeugt also einen globalen Fluss ϕ auf E.

$$\varphi(t, x_0) = u(t, 0)x_0$$

und $u(t, 0)$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = I = \mathrm{id}_E \tag{10-3}$$

Dies ist äquivalent zu der Integralgleichung

$$x(t) = I + \int_0^t Ax(s)ds = I + A \int_0^t x(s)ds$$

Die naheliegende Iteration lautet

$$
\begin{aligned}
&X_0(t) = I \\
&X_1(t) = I + A\int_0^t x(s)ds = I + At \\
&X_2(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \\
&\dots \\
&X_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}A^k
\end{aligned}
$$

Diese Reihe konvergiert auf jedem kompakten Intervall in $\mathbb{R}$.

Bemerkung Wenn E nicht endlich dimensional ist, muss der Operator beschränkt sein.
Somit ist $e^{tA} \in L(E)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, insbesondere stetig wegen der absoluten Konvergenz auf kompakten Intervallen. Der Grenzübergang der Iteration ergibt

$$
u(t) = I + \int_0^t Au(s)ds
$$

die eindeutige Lösung das Anfangswertproblem $10-3$ ist.

30 **Satz:**
Für jedes $A \in L(E)$ ist die Abbildung $u\colon \mathbb{R} \to L(E), t \mapsto e^{tA}$ ein glatter Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R},+)$ in $GL(E)$, das heißt $u(t+s) = u(t)u(s)$.

Beweis (10.30) Wir haben für die globale Lösung des Anfangswertproblems

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = Ax, x(t_0) = x_0 \\
&u(t,t_0,x_0) = u(t-t_0,0,x_0) \quad \forall t,t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in E
\end{aligned}
$$

Also gilt

$$
\begin{aligned}
&u(t,s)x = u(ts,0)x \\
&\Rightarrow u(t,s) = u(t-s,0) = u(t-s) \\
&\Rightarrow u(t)u(s) = u(t,0)u(s,0) = u(t+s,s)u(s,0) = u(t+s,0) = u(t+s)
\end{aligned}
$$

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
&u(-t)u(t) = I = u(t)u(-t) \\
&\Rightarrow \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA} \\
&= (u(t))^{-1} = u(-t)
\end{aligned}
$$

Also ist u ein Gruppenhomomorphismus. Die Glattheit folgt mit vollständiger Induktion mit der Differentialgleichung.

Bemerkungen

1. Sei $A \in L(E)$, dann gilt

$$e^{oA} = I, \quad e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$$
$$e^{tA} \in GL(E), \quad \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$$
$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$
$$\|e^{tA}\| \leq e^{|t|\|A\|}$$

2. Für den globalen Fluss ϕ gilt

$$\phi(t,x) = e^{tA}x \qquad \forall t \in \mathbb{R}, x \in E$$

3. Für $A \in L(E)$, $b \in C(J,E)$, $J \subset \mathbb{R}$ offen ist die globale Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$x(t,t_0,x_0) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds$$

nach dem Prinzip der Variation der Konstanten.

31 **Satz: Rechenregeln für exp**
Seien $A, B \in L(E)$

1. Falls $AB = BA$ dann gilt

$$Ae^B = e^BA \wedge e^{A+B} = e^Ae^B$$

2. Falls $B \in GL(E)$ dann gilt

$$e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$$

Beweis (10.31) Wir betrachten die zugehörigen Differentialgleichungen und sehen, dass sie gleich sind.

Basiswechsel/Lösungsformel $\dot{x} = Ax$ geht über zu $\dot{y} = BAB^{-1}y$ mit $y = Bx$ mit Fundamentalmatrix $e^{BAB^{-1}t} = Be^{At}B^{-1}$.

Ist $A \in L(E)$ und $E = \bigoplus_{j=1}^k E_j$, sowie die E_j invariant unter A so sagt man die Zerlegung von E zerlegt A in $\bigoplus_{j=1}^k A_j$.

32 **Lemma:**
Sei $A \in L(E)$ und $E = \bigoplus_{j=1}^k E_j$ dann wird A durch $\bigoplus E$ zerlegt genau dann, wenn

$$AP_j = P_jA \quad \forall j$$

Korollar Wenn A durch $\bigoplus E_0$ zerlegt wird, dann zerlegt $\bigoplus E_j$ auch e^{tA}.

Fortan sei $K = \mathbb{C}$, $A \in L(E)$ und $\lambda_1, \cdots \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A sowie $m_1, \cdots m_j$ die algebraischen Vielfachheiten.

Die Menge der Eigenwerte von A heißt „Spektrum" $\sigma(A) = \left\{\lambda_i\right\}$. Es gilt

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \ker(A - \lambda) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{im}(A - \lambda) \in E$$

Wir haben A_j, $X := E_j$ die Eigenräume zu den Eigenwerten λ_j und setzen

$$N := (A - \lambda)|_X$$

die Nilpotente zum Eigenwert λ. Also $N^m = 0$.

Insbesondere $X = \bigoplus_{k=1}^s X_k$ sodass

1. $N(X_k) \subset X_k$
2. Jedes X_k besitzt eine Basis $\left\{u_{k,1}, \cdots, u_{k,q_k}\right\}$ mit

$$Nu_{k,1} = 0$$
$$Nu_{k,r+1} = u_{k,r} \qquad \forall 0 < r < q_i$$

Das heißt bezüglich der Basis $\left\{u_{k,r}\right\}$ hat $A_j|_{X_k}$ die Form einer Jordanmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{q_k \times q_k}$$

$\bigoplus_{k=1}^s X_k$ zerlegt N, damit A_j also auch $e^{tA_j} = \bigoplus e^{tA_j|_{X_k}}$.

$$N^k u_{k,r} = u_{k,r_n} \qquad \text{für} \quad 1 \leq r \leq q \wedge 0 \leq n \leq r - 1$$
$$N^r u_{k,r} = 0 \quad \forall 1 \leq r \leq q_k$$

Sei

$$X_k \ni x = \sum_{r=1}^{q_k} \alpha_r u_{k,r} \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
& e^{tA}x = e^{tA|X_k}x = e^{t\lambda}e^{tN}x \\
& = e^{\lambda t}\sum_{r=1}^{q_k}\alpha_r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}N^n u_{k,r} \\
& = e^{\lambda t}\sum_{r=1}^{q_k}\alpha_r\sum_{n=0}^{r-1}\frac{t^n}{n!}u_{k,r-n} \\
& = e^{\lambda t}\alpha_1 u_{k,1} \\
& + e^{\lambda t}\alpha_2\left(u_{k,2} + t u_{k,1}\right) \\
& + e^{\lambda t}\alpha_3\left(u_{k,3} + t u_{k,2} + \frac{t^2}{2}u_{k,1}\right) \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

33 **Satz:**

Sei $K = \mathbb{C}$, $A \in L(E)$, E ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Banachraum und $\left\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\right\}$ die Eigenwerte von A mit den Vielfachheiten m_j. Dann gibt es genau m_j linear unabhängige Lösungen der Gleichung

$$\dot{x} = Ax \tag{33.1}$$

von der Form

$$x_{j,s}(t) = e^{\lambda_j t}p_{j,s-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad 1 \le s \le m_j$$

wobei $p_{j,r}(t)$ Polynome vom Grad $\le r$ sind mit Koeffizienten in E. Alle diese Lösungen bilden das Fundamentalsystem zu 33.1.

Falls A halbeinfach ist (d.h. diagonalisierbar), dann ist das Fundamentalsystem gegeben durch

$$\left\{e^{\lambda_i t}y_{j,s} | 1 \le s \le m_j, 1 \le j \le k\right\}$$

mit linear unabhängigen Vektoren $y_{j,s} \in E$.

Erinnerung Die geometrische Vielfachheit von λ_j ist die Dimension des Kerns $A - \lambda$.

Sei $K = \mathbb{R}$

34 **Definition: „Komplexifizierung“**

Die Komplexifizierung $E_{\mathbb{C}}$ von E sei

$$E_{\mathbb{C}} := E \oplus iE \approxeq E \times E$$
$$a + ib \in E_{\mathbb{C}} \Leftarrow (a, b) \in E \times E$$
$$(x, 0)i := (0, x)$$
$$\|z\|_{E_{\mathbb{C}}} := \max_{k \in [0,2\pi]} |x \cos\varphi + y \sin\varphi|$$

$\left(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{E_{\mathbb{C}}}\right)$ ist ein $\mathbb{C}$-Banachraum der Dimension $\dim_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(E)$.

35 **Definition: „Komplexifizierung der Matrix“**

Die Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$ von A sei gegeben durch

$$A_{\mathbb{C}}(x, y) := Ax + iAy$$

$A_{\mathbb{C}}$ ist ein Endomorphismus, das heißt $\|A_{\mathbb{C}}\|_{L(E_{\mathbb{C}})} = \|A\|_{L(E)}$.

Bemerkung

$$(A^n)_{\mathbb{C}} = (A)^n_{\mathbb{C}}$$
$$(e^{tA})_{\mathbb{C}} = e^{tA_{\mathbb{C}}}$$

Das gesuchte reelle Fundamentalsystem bekommen wir durch die Zerlegung des komplexen Fundamentalsystem in Real- und Imaginärteil. Die Lösungen sind von der Form

$$x_{j,s}(t) = e^{\lambda_j t} p_{j,s-1}(t)$$

Es sei

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos\omega t + i \sin\omega t), \quad \lambda = \alpha + i\omega$$

36 **Satz:**

Sei $K = \mathbb{R}$, $A \in L(E)$, $\dim_{\mathbb{R}}(E) < \infty$ und u eine Lösung der Gleichung

$$\dot{x} = Ax$$

Dann ist u eine Linearkombination von Funktionen der Form

$$at^k e^{at} \cos\omega t, \qquad bt^k e^{\alpha t} \sin\omega t, \quad a, b \in E, k \in 0, \cdots, m(\alpha + i\omega) - 1$$

zu den Eigenwerten $\alpha + i\omega$ von $A_{\mathbb{C}}$, $\omega \geq 0$.

37 **Satz: Stabilitätskriterium**

Sei $A \in L(E)$, dann gilt:

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA} = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$$

das heißt $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ für alle Lösungen u der Gleichung $\dot{x} = Ax$.

Beweis (10.37) Sei $K = \mathbb{R}$.

$$(e^{tA})_{\mathbb{C}} = e^{tA_{\mathbb{C}}}$$
$$M := \max\{|x|, |y|\} \leq \|x + iy\| \leq 2M$$
$$(e^{tA})_{\mathbb{C}} \to 0 \Leftrightarrow e^{tA_{\mathbb{C}}} \to 0$$

Es reicht also $K = \mathbb{C}$ zu betrachten.

Rückrichtung Sei $\mathrm{Re}\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$, dann ist u eine Linearkombination von

$$t^n e^{\lambda t} y, \quad y \in E, \quad \lambda \in \sigma(A)$$

Dann ist

$$|t^n e^{t\lambda} y| = t^n e^{t\mathrm{Re}(\lambda)} |y| \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Hinrichtung Sei $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ für ein $\lambda \in \sigma(A)$. Dann ist $u(t) := e^{t\lambda} y$, $y \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda)$, $y \neq 0$ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$, $x \in E$. Dann ist

$$\lim_{t\to\infty} |e^{t\lambda} y| = |y| \lim_{t\to\infty} e^{t\mathrm{Re}\lambda} \neq 0$$

Beobachtung: $e^{tA} \to 0 \Leftrightarrow u(t) \to 0 \forall u$.

Korollar Sei $A \in L(E)$ dann gilt

$$\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \forall \lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \forall u : \dot{u} = Au, u \neq 0 : \lim_{t\to-\infty} |u(t)| = \infty$$

Korollar Für jede Lösung von $\dot{x} = Ax$, $x \in E$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$$

Erinnerung Für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten wir eine wunderbare Lösungsformel. Jedoch brauchen wir dafür ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung. Im Fall von konstantem Koeffizienten ist dies durch $e^{(t-t_0)A}$ möglich. Dazu muss man bis auf Spezialfälle die Jordan-Normalform berechnen.

38 **Definition: „Eigenräume“**

$$E_\lambda := \ker\left(A - \lambda I_n\right)$$

heißt der geometrische und

$$\overline{E}_\lambda := \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \ker\left(a - \lambda I_n\right)^p$$

der algebraische Eigenräume zum Eigenwert λ von A.

Dabei ist

1. $A\overline{E}_\lambda \subset \overline{E}_\lambda$
2. $\overline{E}_\lambda \cap \overline{E}_\mu = \{0\}$ für $\lambda \neq \mu$

Also reicht es $A_\lambda := A|\overline{E}_\lambda$ zu betrachten.

$$A_\lambda = \lambda I + \underbrace{A - \lambda I}_{N_\lambda} \Rightarrow N_\lambda^{\overline{m}_\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow e^{tA_\lambda} = e^{t\lambda}\mathrm{Id} \qquad \underbrace{e^{tN_\lambda}}_{\text{Polynom vom Grad}\quad \overline{m}_\lambda - 1}$$

Qualitative Theorie Aussagen, die ohne explizite Rechnungen geprüft werden können.

Stabilität Konvergieren alle Lösungen $x(t)$ für $t \to \infty$?
Im Fall der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gilt dies bei spec $A \subset \{\mathrm{Re}\, z < 0\}$ und wir erhalten eine Abschätzung:

$$x(t) \in O(e^{t \max \mathrm{Re}\, \lambda} t^{\dim E - 1}$$

Abwesenheit von Stabilität wird populistisch als „Chaostheorie“ bezeichnet. Dabei wirken sich kleine Ausgangsfehler eventuell massiv über die Zeit auf die Abweichung der berechenbaren Lösung aus.

Es kann auch sein, dass andere Kenngrößen Stabilität bringen.

39 **Definition: „Halbeinfach“**

Es sei $A \in L(\mathbb{C}^N)$, $\lambda_t \in$ spec A.
λ heißt halbeinfach (engl. semisimple) genau dann wenn

$$E_\lambda = \overline{E}_\lambda \Leftrightarrow N_\lambda = 0 \Leftrightarrow A|\overline{E}_\lambda = \lambda I_N$$

A heißt halbeinfach genau dann wenn alle Eigenwerte halbeinfach sind. Die ist das selbe wie Diagonalisierbarkeit.

40 **Satz: Beschränktheitssatz**

Es sei die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ gegeben, $A \in L(\mathbb{C}^N)$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.

1. $\overline{lim}_{t\to\infty} |x(t)| < \infty$ für alle Lösungen der Differentialgleichung
2. a) spec $A \subset \{\operatorname{Re} z \leq 0\}$
   b) ist $\lambda \in$ spec A, Re $\lambda = 0$, dann ist λ halbeinfach.

Beweis (10.40) Lösungen sind Linearkombinationen der Funktionen

$$\left\{e^{\lambda t} t^j, \lambda \in \operatorname{spec} A, j = 0, \cdots, \overline{m}_j - 1\right\}$$

10.7 Zur klassischen Mechanik

Wir betrachten Systeme, die charakterisiert sind durch $q \in U \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^m$. (Das heißt, m Freiheitsgrade besitzt) q beschreibt die „Konfiguration". Der Phasenraum benötigt auch die Geschwindigkeiten $\dot{q}$. (Dies entspricht q' bei $q = q(t)$.) Das System wird beschrieben durch 2 Zustandsgrößen

1. die kinetische Energie (Bewegung) $T(t, q, \dot{q})$
2. die potentielle Energie (Lage) $U(t, q)$

Die Bewegung erfolgt nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung (Maupertuis, Euler, Hamilton).

Die Bewegung des Systems von $q_1 = q(t_1)$ nach $q_2 = q(t_2)$ erfolgt so, dass das Integral (die Aktion / Energie)

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U)(t, q(t), \dot{q}(t))dt =: S(t_1, t_2, q)$$

stationär wird unter allen stückweise C^1-Wegen von q_1 nach q_2 in der Zeit $[t_1, t_2]$. (Stationär bedeutet, dass die Ableitung nach q verschwindet.) → Variationsrechnung.

Dies ist genau dann der Fall, wenn q die Euler-Lagrange-Gleichung löst:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial (T - U)}{\partial q}$$

Häufig ist T von der speziellen Form

$$T(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} a_{j,k}(t, q(t))\dot{q}_j(t) q_k(t)$$

wobei

$$A(t, q) = \left(a_{j,k}(t, q)\right) \in L(\mathbb{R}^m)$$
$$A(t, q)^T = A(t, q) \quad \text{positiv definit}$$

das heißt spec $A(t, q) \subset (0, \infty)$.

Weiterhin ist oft auch A unabhängig von t und q und man nimmt ebenso an, dass U nicht von t abhängt, das heißt

$$T(q) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=}^{m} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k =^! \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dot{q}_j^2, \qquad \forall j \colon \lambda_j > 0$$

In diesem Fall ist

$$\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{p}} = D_q \left(T(\dot{q}) - U(q)\right) = \left(\lambda_j \dot{q}_j\right)$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q} = \left(\lambda_j \ddot{q}_j\right) = \frac{\partial L}{\delta q} = -\mathrm{grad} U(q)$$

oder

$$m_j \ddot{q}_j(t) = -\frac{\partial U}{\partial q_j}(q)$$

Wichtigstes Beispiel Das N-Körper-Problem von I.Newton (1683), als Modell für das Sonnensystem.

m_j ist dann die Masse des punktförmigen Planeten mit Schwerpunkt $q_j \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow q \in \mathbb{R}^{3N}$. U entsteht aus dem Gravitationsgesetz (R. Hook). Für $N = 2$ ist also

$$U(q_1, q_2) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|}$$

$\gamma = 1$ nach Wahl der Koordinaten oder Einheiten.

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}(q_1, q_2) = -m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(|q_1 - q_2|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -m_1 m_2 \left(-\frac{1}{2} \left(|q_1 - q_2|^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) (q_1 - q_2)$$
$$= \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|^2} \frac{q_1 - q_2}{|q_1 - q_2|}$$
$$\frac{d}{dt}(m_j \dot{q}_j) = m_1 \ddot{q}_1(t) = \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|^2} \frac{q_2 - q_1}{|q_1 - q_2|}$$
$$q_1 \neq q_2$$

Zum parameterabhängigen Anfangswertproblem

$$\int_0^1 f'(x + s((x + h) - x)) ds = \frac{1}{h} f(x + x + h - x) - \frac{1}{h} f(x)$$
$$= \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Seien E, F endlich-dimensionale reelle Banachräume, $\Lambda \subset F$ offen, $D \subset E$ offen und $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, x, \lambda), \qquad x(t_0) = x_0$$

und definieren $D(f, \Lambda)$ als den Definitionsbereich der Lösung des Anfangswertproblems.

Sei $f \in C^{0,1}(J \times (D \times \Lambda), E)$. (Also stetig in J und stetig differenzierbar in $D \times \Lambda$).

Annahme: Die Lösung des Anfangswertproblems $u \colon D(f, \Lambda) \to D$, $t \mapsto u(t)$ differenzierbar und

$$D(f, \Lambda) = \left\{(t, t_0, x_0, \lambda | t \in J(t_0, x_0, \lambda)\right\}$$

u sei differenzierbar nach (t_0, x_0, λ) und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, t_0, x_0, \lambda) = f(t, u(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \tag{10-4}$$

Dann können wir nach t_0 ableiten:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{\partial u}{\partial t}(t, t_0, x_0, \lambda) = \frac{\partial}{\partial t_0} f(t, u(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t_0}(t, t_0, x_0, \lambda)}_{:=y(t,t_0,x_0,\lambda)} \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} y(t, t_0, x_0, \lambda) = y(t, t_0, x_0, \lambda)
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_0} u(t_0, t_0, x_0, \lambda) = \frac{\partial}{\partial t} x_0 = 0 \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, t_0, x_0, \lambda) + \frac{\partial u}{\partial t_0}(t_0, t_0, x_0, \lambda) \\
&= f(t_0, \underbrace{u(t_0, t_0, x_0, \lambda)}_{=x_0}, \lambda) + y(t_0, t_0, x_0, \lambda) \\
&\Rightarrow y(t_0, t_0, x_0, \lambda) = -f(t_0, x_0, \lambda)
\end{aligned}$$

Also

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial u} y, \qquad y(t_0) = -f(t_0, x_0, \lambda) \tag{10-5}$$

Dies ist also ein neues Anfangswertproblem für t_0 in E mit $y = \frac{\partial u}{\partial t_0}$. Analog für x_0 in $L(E)$:

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial u} z, \qquad z(t_0) = \mathrm{id}_E \tag{10-6}$$

und für λ in $L(E, F)$:

$$\dot{w} = D_2 f w + D_3 f, \qquad w(t_0) = 0 \tag{10-7}$$

41 **Satz:**

Sei $f \in C^{0,1}(J \times (D \times \Lambda), E)$, dann ist $u \in C^1(D(f, \Lambda), D)$ und die partiellen Ableitungen sind die Lösungen der Anfangswertprobleme 10 − 5, 10 − 6 und 10 − 7. Außerdem existieren „gemischte Ableitungen“

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial t_0} u = \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t} u$$

(analog für x_0 und λ) und sind stetig.

Beweis (10.41)

1. Wenn Teil 1 gezeigt ist, dann seien

$$\begin{aligned}
\mu &:= (t_0, x_0, \lambda) \\
A(t, \mu) &:= \frac{\partial f}{\partial u}(t, \mu) \\
b(t, \mu) &:= \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \mu)
\end{aligned}$$

Da $u \in C(D(f, \Lambda), D)$ sind $A(t, \mu) \in L(E)$ und $b(t, \mu) \in L(E)$ stetig in (t, μ). Damit sind die Anfangswertprobleme gerade

$$\begin{aligned}
&\dot{y} = A(t, \mu) y, \qquad y(t_0) = -f(\mu) \\
&\dot{z} = A(t, \mu) z, \qquad z(t_0) = id_E \\
&\dot{w} = A(t, \mu) w + b(t, \mu), \qquad w(t_0) = 0
\end{aligned}$$

in endlich-dimensionale Banachräumen. Also existieren eindeutige Lösungen, die in allen Variablen stetig sind und weil $(t_0, x_0, \lambda) \mapsto f(t_0, x_0, \lambda)$ stetig differenzierbar ist, folgt die Behauptung.

2. „Übergang zum erweiterten Anfangswertproblem“

$$\begin{aligned}
&\dot{z} = g(t, z) \qquad \text{mit} \quad g := (f, 0) \in C^{0,1}(J \times (D \times \Lambda), E \times F) \\
&z(t_0) = (x_0, \lambda)
\end{aligned}$$

Das heißt oBdA können wir annehmen, dass $\Lambda = \emptyset$.

3. Sei $(t, t_0, x_0) \in D(f)$ und sei $\varepsilon > 0$ so dass

$$\begin{aligned}
&\{t, t_0\} \times B_\varepsilon(x_0) \subset D(f) \\
&v(t, t_0, x_0, h) := u(t, t_0, x_0 + h) - u(t, t_0, x_0) \\
&B(t, t_0, x_0, h) := \int_0^1 D_2 f(t, u(t, t_0, x_0) - s v(t, t_0, x_0, h)) ds, \qquad h \in B_\varepsilon(x_0)
\end{aligned}$$

OBdA sei ε so klein, sodass

$$u + sv \in B_\varepsilon(x_0) \quad \forall s \in [0,1]$$

Betrachten wir nun

$$\frac{\delta}{\delta t} v(t, t_0, x_0, h) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, t_0, x_0 + h) - \frac{\partial}{\partial t} u(t, t_0, x_0)$$
$$= f(t, u(t, t_0, x_0 + h)) - f(t, u(t, t_0, x_0)) = B(t, t_0, x_0, h) v(t, t_0, x_0, h)$$

Es gilt

$$v(t_0, t_0, x_0, h) = u(t_0, t_0, x_0 + h) - u(t_0, t_0, x_0) = x_0 + h - x_0 = h$$

Das heißt $v(t, t_0, x_0, h)$ ist die Lösung des Anfangswertproblems in E

$$\dot{v} = B(t, t_0, x_0, h) v, \qquad v(t_0) = h$$

Außerdem ist $B(t, t_0, x_0, h) \in L(E)$. Somit können wir folgendes Anfangswertproblem in $L(E)$ betrachten

$$\dot{c} = B(t, t_0, x_0, h) c, \qquad c(t_0) = id_E \tag{10-8}$$

Dieses hat die eindeutige Lösung $c(t, t_0, x_0, h) \in L(E)$, und $t \mapsto c(t, t_0, x_0, h)h$ ist eine Lösung des vorherigen Anfangswertproblems. Dessen Lösung ist jedoch v. Also gilt

$$c(t, t_0, x_0, h)h = v(t, t_0, x_0, h)$$

Damit ist dann

$$|u(t, t_0, x_0 + h) - u(t, t_0, x_0) - c(t, t_0, x_0, 0)h| \le |h|_E |c(t, t_0, x_0, h) - c(t, t_0, x_0, 0)|_{L(E)}$$
$$= o(|h|_E)$$

Also ist $x_0 \mapsto u(t, t_0, x_0)$ stetig differenzierbar. Insbesondere gilt

$$D_3 u(t, t_0, x_0) = c(t, t_0, x_0, 0)$$
$$t \mapsto D_3 u(t, t_0, x_0) \quad \text{löst 10-8}$$

und wegen $B(t, t_0, x_0, h) = D_2 f(t, t_0, x_0) = A(t, \mu)$ auch $10 - 6$.

4. Für betragsmäßig genügend kleine $s_0 \in \mathbb{R}$ sei

$$w(t, t_0, x_0, s_0) := u(t, t_0 + s_0, x_0) - u(t, t_0, x_0)$$
$$D(t, t_0, x_0, s_0) = \int_0^1 D_2 f(t, u(t, t_0, x_0) - sv(t, t_0, x_0, s_0)) ds$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial w} = Dw$$
$$\Rightarrow w(t_0, t_0, x_0, s_0) = u(t_0, t_0 + s_0, x_0) + x_0$$
$$= s_0 + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(t_0 + s_0 s, t_0 + s_0, x_0) ds = s_0 f(t, x_0) + r(t_0, x_0, s_0) s_0$$
$$= s_0 f(t_0, x_0) + \int_0^1 f(t_0, x_0) - f(t + ss_0, u(t_0 + ss_0, f_0 + s_0, x_0) ds$$

Also löst w das Anfangswertproblem in E

$$\dot{z} = Dz, \qquad z(t_0)f - s_0 f(t_0, x_0) + r(t_0, x_0, s_0)$$

Dies entspricht wieder einem eindeutig Lösbaren Anfangswertproblem in $L(E)$ und wir erhalten

$$D_2 f(t, u(t, t_0, x_0)) = A(t_0, \mu)$$

und somit ist $D_2 u$ die Lösung des Anfangswertproblems 10 – 5.

42 **Korollar:**

Sei M ein lokal kompakter metrischer Raum und $f \in C(J \times D \times \Lambda \times M, E)$ stetig differenzierbar in $x_0 \in D$ und $\lambda \in \Lambda$, dann ist $u \in C(D(f, \Lambda \times M), D)$ stetig differenzierbar in $x_0 \in D$, $\lambda \in \Lambda$ und $t_0 \in J$ und die partiellen Ableitungen sind Lösungen der Anfangswertprobleme 10 – 5, 10 – 6 und 10 – 7. Die gemischten Ableitungen existieren wie oben und sind stetig.

Mechanik Ein System wird beschrieben durch $\mathbb{R}^n \supset_{\text{offen}} U \ni \left(q_1, \cdots, q_m\right)$, das heißt es besitzt m Freiheitsgrade. Die Bewegung ist die Zeitentwicklung des Systems und beschrieben durch die Lagrangefunktion $L(t, q(t), \dot{q}(t)) = (T - U)(t, q(t), \dot{q}(t))$ gemäß der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Anwendung auf das Planetensystem:

Das Zweikörper-Problem in einem Zentralfeld Wir betrachten 2 Massenpunkte $x_S, x_E \in \mathbb{R}^3$ mit $x_S \neq x_E$.

$$m_E \ddot{x}_E(t) = \gamma m_E m_S \frac{(x_S - x_E)(t)}{|x_E - x_S|^3(t)}$$
$$m_S \ddot{x}_S(t) = \gamma m_E m_S \frac{(x_E - x_S)(t)}{|x_E - x_S|^3(t)}$$
$$\Rightarrow (x_E \ddot{-} x_S)(t) = \gamma(m_S + m_E)\frac{(x_S - x_E)(t)}{|x_S - x_E|^3(t)}$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = -m\frac{x(t)}{|x(t)|^3} = -\frac{m}{|x(t)|^2}\frac{x(t)}{|x(t)|}$$

Außerdem folgt

$$\frac{1}{m_E + m_S}(m_E \ddot{x}_E + m_S \ddot{x}_S)(t) = 0$$
$$y(t) := \frac{(m_E x_E + m_S x_S)(t)}{m_E + m_S} \qquad \text{Schwerpunkt}$$

Der Schwerpunkt beschreibt eine Gerade und ist unbeschleunigt. Damit kann die absolute Bewegung von x_S und x_E bestimmt werden. Es genügt $x(t)$ zu berechnen.

Leichte Verallgemeinerung:

$$\frac{m}{|x(t)|^2}\frac{x(t)}{|x(t)|} = \left(\operatorname{grad}_x - \frac{m}{|x|}\right)(x(t))$$

$$\text{wegen} \quad \operatorname{grad}_x(U(|x|)) = U'(|x|)\frac{x}{|x|}$$

Also betrachten wir

$$\ddot{x}(t) = -\operatorname{grad}_x U(r), \quad U \in C^\infty((0,\infty))$$

Dann heißt $X = \operatorname{grad}_x U$ ein Zentralfeld genau dann, wenn

$$X \in C^\infty(\mathbb{R}^{m*}, \mathbb{R}^m), \quad X \circ O = X \forall O \in O(m)$$

1. Schritt Energieerhaltung

$$\ddot{x}(t) = U'(r(t))\frac{x}{r}(t)$$

$$\langle \ddot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle = -U'(r(t))\frac{\langle x, \dot{x}(t)\rangle}{r(t)} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 = -\frac{d}{dt}U(|x(t)|)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|x(t)|^2 + U(|x(t)|)\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + 2U(r) = E_0 = (T+U)(t, q(t), \dot{q}(t))$$

2. Schritt Drehimpulserhaltung

Wir betrachten das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{d}{dt}(mx(t) \times \dot{x}(t)) = \underbrace{mx(t) \times \dot{x}(t)}_{=0} + mx(t) \times \ddot{x}(t)$$

$$= mx(t) \times \left(-U'(r)\right)\frac{x(t)}{r(t)}$$

$$\Rightarrow mx(t) \times \dot{x}(t) =: Me_3$$

Das heißt die Bewegung findet tatsächlich im $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ statt, mit der Basis e_1, $e_2 = Je_1$. Wobei J die positive Drehung um $\frac{\pi}{2}$ ist.

Polarkoordinaten in (r, ϕ) in $(\mathbb{R}^2)^*$ festgelegt durch

$$x(r,\phi) = r(\cos\phi e_1 + \sin\phi e_2)$$

$$e_r := \frac{x}{|x|}, \quad e_\phi = Je_r x(t) = re_r$$

$$\dot{x} = \dot{r}e_r + r\dot{e}_r$$

Wir schreiben

$$
\begin{aligned}
& e_r = \cos\phi(t) e_1 + \sin\phi(t) e_2 \\
& \Rightarrow \dot{e}_r(t) = -\sin\phi(t)\phi(t)e_1 + \cos\phi(t)\dot{\phi}(t)e_2 \\
& = \dot{\phi(t)}\left(-\sin\phi(t)e_1 + \cos\phi(t)e_2\right) \\
& = \dot{\phi}(t)J(\sin\phi(t)Je_1 + \cos\phi(t)e_1) \\
& = \dot{\phi}(t)Je_r = \phi(t)e_\phi
\end{aligned}
$$

Also wird

$$
\begin{aligned}
& mx(t) \times \dot{x}(t) = mre_r(t) \times \left(\dot{r}e_r(t) + r\dot{\phi}e_\phi(t)\right) \\
& = mr^2\dot{\phi}(t)e_r \times e_\phi(t) = mr^2\dot{\phi}(t)e_3 =: mMe_3
\end{aligned}
$$

oder

$$
r^2\dot{\phi}(t) = M \qquad \text{Drehimpuls}
$$

Wir setzen $M \neq 0$ voraus, damit nicht der Kollisionsfall eintritt. Deswegen ist auch $\dot{\phi}(t) \neq 0$ für alle t. Somit können wir lokal die von $x(t)$ überstrichene Fläche in der Zeit $\left[t_1, t_2\right]$ schreiben als

$$
\begin{aligned}
& S(t_1, t_2) = \int_{\phi(t_1)}^{\phi(t_2)} \left(\int_0^{r(\phi)} r dr\right) d\phi = \int_{\phi(t_1)}^{\phi(t_2)} \frac{r(\phi)^2}{2} d\phi \\
& \Rightarrow \frac{d}{dt} S(t_1, t) = \frac{r(\phi(t))^2}{2}\dot{\phi}(t) = \frac{1}{2} r(t)^2 \dot{\phi}(t)
\end{aligned}
$$

Also wird

$$
S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} S(t_1, t) dt = \frac{M}{2}(t_2 - t_1)
$$

43 **Satz: 2. Keplersches Gesetz**
In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl $(x(t))$ gleiche Flächen.

Die Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten Wir hatten

$$
\begin{aligned}
& \dot{x}(t) = \dot{r}e_r(t) + r\dot{\phi}e_\phi(t) \\
& \Rightarrow \ddot{x}(t) = \ddot{r}e_r(t) + r\dot{e}_r(t) + \dot{r}_\phi e_\phi(t) + r\ddot{\phi}e_\phi(t) + r\dot{\phi}\dot{e}_\phi(t) \\
& = \ddot{r}e_r + 2r\dot{\phi}e_\phi + r\ddot{\phi}e_\phi - r\dot{\phi}^2 e_r \\
& = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) e_r + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right) e_\phi \\
& = -U'(r)e_r(t) \\
& 0 = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + U'(r)\right) e_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})e_\phi r^2\dot{\phi} = M \Rightarrow r\dot{\phi}^2 = \frac{M^2}{r^3}
\end{aligned}
$$

Also

$$0 = \ddot{r} - \frac{M^2}{r^3} + U'(r)$$
$$0 = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}$$

Wir schreiben

$$\ddot{r} = \frac{M^2}{r^3} - U'(r) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(U(r) + \frac{M^2}{2r^2}\right) =: -\frac{\partial}{\partial r}V(r)$$

Dies heißt effektives Potential. Es folgt

$$\ddot{r}\dot{r} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}r$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2} + V(r)\right) = 0$$
$$\frac{r^2(t)}{2} + V(r(t)) = E_1 \overset{!}{=} E_0$$
$$\dot{r}(t) = \pm\sqrt{2(E_0 - V(r(t)))}$$
$$\int dt = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{2}(E_0 - V(r))}$$

Wenn die Bewegung nicht periodische ist, dann liegt der Orbit dicht in $B_{r_{\max},r_{\min}}(0)$.

Zur Bestimmung einer perdiodischen Bewegung stellen wir den Winkel zwischen zwei konsekutiven Punkten $|x(t_1)| = r_{\min}$ (Perizentrum) und $|x(t_2)| = r_{\max}$ (Apozentrum) fest. Dazu brauchen wir $\frac{d\phi}{dr}$, dann:

$$\Phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{d\phi}{dr}d\phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\dot{\phi}}{r}(t(r))d\phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M}{r^2\sqrt{2(E_0 - V(r))}}dr$$

Also ist die Bahn geschlossen, wenn $\frac{\Phi}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.